ಬೀಜಗಣಿತ ಪರಿಚಯ

ಭಾಗ–1

ಡಿ ಎಸ್ ಗುಂಡೂರಾವ್

1979

ಕನ್ನಡ ಅಧ್ಯಯನ ವಿಭಾಗ

ಕೃಷಿ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯ, ಬೆಂಗಳೂರು-24

ಪ್ರಕಟಣೆ : 11

ಬೀಜಗಣಿತ ಪರಿಚಯ

(ಭಾಗ - 1)

ಡಿ. ಎಸ್. ಗುಂಡೂರಾವ್

1979

ಕನ್ನಡ ಅಧ್ಯಯನ ವಿಭಾಗ

ಕೃಷಿ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯ ಬೆಂಗಳೂರು-560065

ಬೀಜಗಣಿತ ಪರಿಚಯ (ಭಾಗ-1)-(ಕೃಷಿ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯದ ಕನ್ನಡ ಅಧ್ಯಯನ ವಿಭಾಗದಿಂದ ಸಿದ್ಧಗೊಂಡು ಸಂವಹನ ಸಮಿತಿ ಪ್ರಕಾಶಿತ) ಪ್ರಥಮ ಮುದ್ರಣ 1979

ಪ್ರತಿಗಳು 1000, ಪುಟಗಳು 204 + xiv ಬೆಲೆ : ಸಾದಾಪ್ರತಿ ರೂ. 15-00

ಕ್ಯಾಲಿಕೊಪ್ರತಿ ರೂ. 20-00

ಪ್ರಧಾನ ಸಂಪಾದನೆ

ಪ್ರಾ. ವೀ. ಚ. ಹಿತ್ತಲಮನಿ

ಸಹ ಸಂಪಾದನೆ

ಸಿ. ಕೆ. ಕುಮುದಿನಿ

ಸಂಶೋಧನ ಸಹಾಯಕರು

ತಾಂತ್ರಿಕ ಪರಿಶೀಲನೆ

ಎಚ್. ಎಸ್. ಕೃಷ್ಣಸ್ವಾಮಿ

ಸಹಾಯಕ ಪ್ರಾಧ್ಯಾಪಕರು

ಮುದ್ರಣ

ರವಿಪ್ರಿಂಟರ್ಸ್ ಹುಬ್ಬಳ್ಳಿ (ಪುಟ 1 ರಿಂದ 64)

ಪ್ರಕಾಶ ಮುದ್ರಣಾಲಯ (ಮುಂದಿನ ಎಲ್ಲ ಪುಟಗಳು)

ಗಾಂಧಿ ಚೌಕ, ಧಾರವಾಡ-580 001

ಕುಲಪತಿಗಳ ಹಾರೈಕೆ

ಭಾರತಕ್ಕೆ ಸ್ವಾತಂತ್ರ್ಯಬಂದ ನಂತರ ಎಲ್ಲ ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಭಾಷೆಗಳ ಅಭಿವೃದ್ಧಿಯೂ ನಡೆಯಿತು. ಪ್ರಾದೇಶಿಕ ಭಾಷೆಗಳನ್ನು ಶಿಕ್ಷಣ ಮಾಧ್ಯಮಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡುವ ಪ್ರಯತ್ನ ಬಲವತ್ತರವಾಗಿ ನಡೆದಿದೆ. ನಾಡಿನ ವಿವಿಧ ಭಾಷೆಗಳನ್ನು ಶಿಕ್ಷಣ ಮಾಧ್ಯಮಗಳಾಗುವಂತೆ ಬಲಗೊಳಿಸುವ ಹೊಣೆಯು ವಿವಿಧ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯಗಳದ್ದಾಗಿದೆ. ಅದಕ್ಕನುಗುಣವಾಗಿ ಪ್ರಾದೇಶಿಕ ಭಾಷೆಗಳು ಕೃಷಿ ಶಿಕ್ಷಣದ ಮಾಧ್ಯಮವಾಗುವಂತೆ ಸಿದ್ಧತೆಗಳನ್ನು ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬೇಕಾದದ್ದು ಕೃಷಿ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯಗಳ ಕೆಲಸವಾಗಿದೆ. ನಮ್ಮ ಕೃಷಿ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯ ಈ ಕಾರ್ಯಸಾಧನೆಗೋಸುಗ ಕನ್ನಡದಲ್ಲಿ ಕೃಷಿ ಸಾಹಿತ್ಯ ಮಾಧ್ಯಮಕ್ಕೆ ಅವಶ್ಯವಾದ ಕಾರ್ಯ ಮಾಡುತ್ತಿದೆ.

ಕೃಷಿ ವಿಜ್ಞಾನ ಅನ್ವಯಿತ ವಿಜ್ಞಾನ. ಅದರ ಅಧ್ಯಯನಕ್ಕೆ ಎಲ್ಲ ಮೂಲ ಹಾಗೂ ಮಾನವಿಕ ವಿಜ್ಞಾನಗಳ ಅವಶ್ಯವಿದೆ. ಅಂತೆಯೇ ನಮ್ಮ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯದಲ್ಲಿ ಅವಶ್ಯವಿರುವ ಮೂಲ ಹಾಗೂ ಮಾನವಿಕ ವಿಜ್ಞಾನಗಳನ್ನು ಕಲಿಸುವ ಏರ್ಪಾಡಿದೆ. ಈ ಉಪಯೋಗಕ್ಕಾಗಿ ಹಲವಾರು ಮೂಲ ಹಾಗೂ ಮಾನವಿಕ ವಿಜ್ಞಾನಗಳ ಪುಸ್ತಕಗಳು ಪ್ರಕಟವಾಗುತ್ತಿವೆ. ಈಗ ಪ್ರಕಟವಾಗುತ್ತಿರುವ 'ಬೀಜಗಣಿತ ಪರಿಚಯ' ಅಂತಹವುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು. ಇದನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು, ಶಿಕ್ಷಕರು ಉಪಯೋಗ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವರೆಂದು ನಂಬುತ್ತೇನೆ.

ಕೃಷಿ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯ,
ಬೆಂಗಳೂರು 560065

ಆರ್. ದ್ವಾರಕೀನಾಥ್
ಕುಲಪತಿಗಳು

ಸಂಪಾದಕರ ಮಾತು

ಅನ್ವಯಿಕ ವಿಜ್ಞಾನ ಶಾಸ್ತ್ರಾಧ್ಯಯನಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಪಟ್ಟ ಮೂಲವಿಜ್ಞಾನ ಶಾಸ್ತ್ರಗಳ ತಿಳಿವಳಿಕೆಯು ಅವಶ್ಯವಿರುತ್ತದೆ. ಇದಕ್ಕಾಗಿ ಕೃಷಿ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯವು ಮೂಲ ವಿಜ್ಞಾನ ಹಾಗೂ ಮಾನವಿಕ ಶಿಕ್ಷಣ ನಿರ್ದೇಶನಾಲಯವನ್ನು ವ್ಯವಸ್ಥೆಗೊಳಿಸಿದೆ.

ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ಎಲ್ಲ ಶಾಸ್ತ್ರಗಳಿಗೂ ಮೂಲಶಾಸ್ತ್ರ. ಕೃಷಿ ವಿಜ್ಞಾನಾಭ್ಯಾಸಿಗಳೂ ಕಲಿಯುವುದು ಅತ್ಯವಶ್ಯಕ. ಈ ದಿಸೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರಕಟವಾದ ಮೂರನೆಯ ಪುಸ್ತಕವಿದು. ಇದರಲ್ಲಿ 'ಬೀಜಗಣಿತ' ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ ಬರುವ ಗಣಸಿದ್ಧಾಂತ, ಸಂಖ್ಯಾವ್ಯೂಹ; ಸಂಬಂಧ-ಸಂಬಂಧಕ ಮತ್ತು ನಕ್ಷೆ, ಘಾತಾಂಕಗಳು, ಕರಣಿಗಳು, ಪ್ರತಿಘಾತಗಳು, ವರ್ಗಸಮೀಕರಣಗಳು ಹಾಗೂ ಶ್ರೇಣಿಗಳು ಇವುಗಳನ್ನು ಕುರಿತು ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಓದುಗರ ಅನುಕೂಲಕ್ಕಾಗಿ ಕಡೆಯಲ್ಲಿ ಪಾರಿಭಾಷಿಕ ಪದಕೋಶ ಕೊಟ್ಟಿದೆ.

ಈ ಪುಸ್ತಕವು ಪಿ. ಯು. ಸಿ. ಹಾಗೂ ಕೃಷಿ ವಿಜ್ಞಾನ ಮೊದಲ ವರ್ಷದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಹಾಗೂ ಅಧ್ಯಾಪಕರಿಗೆಲ್ಲ ಉಪಯುಕ್ತವಾಗುತ್ತದೆಂದು ಭಾವಿಸಲಾಗಿದೆ.

ವೀ. ಚ. ಹಿತ್ತಲಮನಿ
ಕನ್ನಡ ಪ್ರಾಧ್ಯಾಪಕರು,
ಹಾಗೂ
ಕ. ಅ. ಸ. ಕಾರ್ಯದರ್ಶಿಗಳು

ಆಷಾಢಮಾಸ ಸಿದ್ಧಾರ್ಥಿನಾಮ ಸಂವತ್ಸರ
ಶಾಲಿವಾಹನ ಶಕೆ 1901
ಕನ್ನಡ ಅಧ್ಯಯನ ವಿಭಾಗ,
ಕೃಷಿ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯ
ಬೆಂಗಳೂರು-560065

ಲೇಖಕರ ಮಾತು

ಇದು ಬೀಜಗಣಿತ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಪದವೀ ಪೂರ್ವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಅವಶ್ಯಕತೆಯನ್ನು ಪೂರೈಸಲು ಬರೆದ ಪುಸ್ತಕ. ಗಣಸಿದ್ಧಾಂತ ಮತ್ತು ಸಂಖ್ಯಾವ್ಯೂಹ ಈ ವಿಷಯಗಳ ಬೋಧನೆಯಿಂದ ಘಾತಾಂಕಗಳು, ಕರಣಿಗಳು, ಪ್ರತಿಘಾತಗಳು ಮತ್ತು ಇತರ ವಿಷಯಗಳ ನಿರೂಪಣೆ ಹಾಗೂ ಬೋಧನ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಪ್ರಚಂಡವಾದಂತಹ ಸ್ಪಷ್ಟತೆ ಮತ್ತು ನಿಖರತೆ ಲಭ್ಯವಾಗುತ್ತದೆಂಬುದು ಎಲ್ಲ ಬೋಧಕರ ಏಕಾಭಿಪ್ರಾಯವಾಗಿದೆ. ಆದಕಾರಣ ನಾನು ಈ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಈ ವಿಷಯ (ಗಣಸಿದ್ಧಾಂತ ಮತ್ತು ಸಂಖ್ಯಾವ್ಯೂಹ) ಗಳನ್ನು ಆದಷ್ಟು ವಿಶದವಾಗಿ ಅನೇಕ ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ ನಿರೂಪಿಸಿದ್ದೇನೆ; ಅಲ್ಲದೆ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಹೊಸ ವಿಷಯವನ್ನು ಮೊಟ್ಟಮೊದಲ ಬಾರಿ ಪರಿಚಯ ಮಾಡಿಕೊಟ್ಟಿರುವ ಕಡೆಗಳಲ್ಲೆಲ್ಲ, ಅದರ ಅರ್ಥವು ಓದುಗನ ಮನಸ್ಸಿನಲ್ಲಿ ದೃಢವಾಗಿ ನಿಲ್ಲಲು ಸಹಕಾರಿಯಾಗುವಂತೆ, ತಪ್ಪದೆ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟು ವಿಶದಪಡಿಸಿದ್ದೇನೆ. ಹೀಗೆ ಗ್ರಹಿಸಿದ ವಿಷಯಗಳ ಪುನರಾವರ್ತನೆ ಓದುಗನ ಮನಸ್ಸಿನಲ್ಲಾಗಲೆಂದು ಆಯಾ ಅಧ್ಯಾಯಗಳಲ್ಲಿ ಯುಕ್ತ ಅಭ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ತಪ್ಪದೇ ಸೇರಿಸಿದ್ದೇನೆ.

ಈ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿರುವ ಪಾರಿಭಾಷಿಕ ಪದಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಎರಡು ಮಾತು. ಪ್ರಕೃತ ಕನ್ನಡದಲ್ಲಿ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಪುಸ್ತಕಗಳ ರಚನೆ ಆರಂಭದ ಹಂತದಲ್ಲಿರುವುದರಿಂದ ಸಾಮಾನ್ಯೀಕರಿಸಿದ ಪಾರಿಭಾಷಿಕ ಪದಗಳು ಎಲ್ಲ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ದೊರೆಯುವುದಿಲ್ಲವೆಂಬುದು ಈಗಾಗಲೇ ಪ್ರಕಟಗೊಂಡ ಗ್ರಂಥಗಳ ಅವಲೋಕನದಿಂದ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಪದಗಳ ಯುಕ್ತಾಯುಕ್ತತೆಯನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸುವ ಹಕ್ಕು ಲೇಖಕನಿಗೆ ಇದೆಯೆಂಬುದು ನನ್ನ ಅಭಿಪ್ರಾಯ. ಭಿನ್ನಾಭಿಪ್ರಾಯವಿರುವ ಕಡೆಗಳಲ್ಲಿ ಪದಗಳ ಯುಕ್ತಾಯುಕ್ತತೆಯನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸುವಾಗ ಸಂಬಂಧಪಟ್ಟ ಪದಗಳ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯನ್ನು ಆಧಾರವಾಗಿಟ್ಟುಕೊಂಡಿದ್ದೇನೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ 'Matrix' ಮತ್ತು 'Function' ಎಂಬ ಪದಗಳಿಗೆ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ 'ಮಂಡಲ' ಮತ್ತು 'ಸಂಬಂಧಕ' ಎಂಬ ಪದಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದ್ದೇನೆ. ಆದರೆ ಕೆಲವೆಡೆಗಳಲ್ಲಿ ಪದಗಳ ಏಕರೂಪತೆಯನ್ನು ಉಳಿಸಿಕೊಳ್ಳುವ ಸಲುವಾಗಿ ಮೇಲಿನ ನಿಯಮಕ್ಕೆ ತಪ್ಪಿ ನಡೆದಿದ್ದೇನೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ 'Arithmetic Progression' 'Geometric Progression' ಮತ್ತು 'Harmonic Progression' ಎಂಬ ಪದಗಳಿಗೆ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ 'ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿ', 'ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಶ್ರೇಣಿ' ಮತ್ತು 'ಹರಾತ್ಮಕ ಶ್ರೇಣಿ' ಎಂಬ ಪದಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದ್ದೇನೆ.

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಧ್ಯಾಯದ ಕೊನೆಯಲ್ಲೂ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇವುಗಳನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಗಮನವಿಟ್ಟು ಅಭ್ಯಾಸಮಾಡಬೇಕು. ಇದರಿಂದ ಮುಂದೆ ಅಭ್ಯಾಸದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವ ವಿಧಾನ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ

ಗೊತ್ತಾಗುತ್ತದೆ. ಪುಸ್ತಕದಾದ್ಯಂತ ಹಲವೆಡೆಗಳಲ್ಲಿ [ಏಕೆ ?] ಎಂಬುದನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದೆ; ಅಂತಹ ಸ್ಥಳಗಳಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಲಾಗಿರುವ (ಆದರೆ ಹೆಸರಿಸದಿರುವ) ಯುಕ್ತ ಪ್ರಮೇಯ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯೇ ಕಂಡುಕೊಂಡು ಮುಂದೆ ಓದಬೇಕು. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಆವರೆಗೆ ಗ್ರಹಿಸಿರುವ ಅಂಶಗಳು ಮನಸ್ಸಿನಲ್ಲಿ ದೃಢವಾಗುಳಿಯಲು ಸಹಕಾರಿಯಾಗಲೆಂದು ಈ ಕುಶಲತೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಅಧ್ಯಾಯದ ಉಪಭಾಗಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಸೂಚಿಸಲಾಗಿದೆ :

1·11 ಎಂಬುದು 1 ನೇ ಅಧ್ಯಾಯದ 11 ನೇ ಉಪಭಾಗವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿ $\in$ ಎಂಬ ಸಂಕೇತದ ವಿವರಣೆಯನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಇದೇ ರೀತಿ 3·7 ಉದಾ : ಎಂಬುದು 3·6 ಉದಾ : ನಂತರ ಬರುವ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. 5·18ರಲ್ಲಿ ಬರುವ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು (5·18·1) ಮತ್ತು (5·18·2) ಎಂಬ ಸಂಕೇತಗಳು ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ. ಅ—5·1·9 (xiii), (xiv), (xv) ಎಂಬುದು 5·1 ಅಭ್ಯಾಸದಲ್ಲಿ ಬರುವ 9 ನೇ ಲೆಖ್ಖದಲ್ಲಿ (xiii), (xiv), (xv) ನೇ ಉಪ ಲೆಖ್ಖಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ. ಈ ಸಂಕೇತಗಳ ಔಚಿತ್ಯ ಹಾಗೂ ಉಪಯುಕ್ತತೆ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗೆ ಕ್ಷಿಪ್ರದಲ್ಲಿ ಗೊತ್ತಾಗುತ್ತದೆ.

ಈ ಪುಸ್ತಕ ರಚನೆಯ ಕಾಲದಲ್ಲಿ ಕರ್ನಾಟಕ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯದ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ ರೀಡರ್ ಆಗಿರುವ ಡಾ. ಎಚ್. ಎಸ್. ಗೋಪಾಲಕೃಷ್ಣ ಅವರು ಇತ್ತ ಉತ್ತೇಜನವನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಸ್ಮರಿಸದಿರಲಾರೆ. ಇವರು ಹಸ್ತ ಪ್ರತಿಯನ್ನು ಆದ್ಯಂತ ವಾಗಿ ಓದಿ ಸೂಕ್ತ ಬದಲಾವಣೆಗಳನ್ನು ಮಾಡಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಸಂಬಂಧ, ಸಂಬಂಧಕ ಮತ್ತು ನಕ್ಷೆ ಎಂಬ ಅಧ್ಯಾಯವನ್ನು ನಾನು ಇವರ ಸಲಹೆಯಂತೆ ಪುನಃ ರಚಿಸಿದ್ದೇನೆ.

ಕನ್ನಡ ಅಧ್ಯಯನ ವಿಭಾಗದ ಪ್ರಾಧ್ಯಾಪಕರಾದ ಶ್ರೀ ವೀ. ಚ. ಹಿತ್ತಲಮನಿ ಇವರ ಒತ್ತಾಸೆ ಮತ್ತು ಬೆಂಬಲವಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, ಬಹುಶಃ ಈ ಪುಸ್ತಕ ರಚನೆಯಾಗು ತ್ತಿರಲಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ಅವರಿಗೆ ನಾನು ಚಿರಋಣಿ. ಕೃಷಿ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯದ ಡೀನ್‌ರಾಗಿದ್ದ ಶ್ರೀ ಕೆ. ರಾಮಕೃಷ್ಣನ್, ಮೂಲವಿಜ್ಞಾನ ಹಾಗೂ ಮಾನವಿಕಶಾಸ್ತ್ರ ಕಾಲೇಜಿನ ನಿರ್ದೇಶಕರಾದ ಡಾ. ಆರ್. ನಾರಾಯಣ್ ಮತ್ತು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ವಿಭಾಗದ ಮುಖ್ಯಸ್ಥರಾದ ಪ್ರೊ। ಪಿ. ಸಿ. ಶ್ರೀಧರನ್ ಇವರೆಲ್ಲರ ಸಹಕಾರಗಳನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಸ್ಮರಿಸ ಬಯಸುತ್ತೇನೆ. ನನ್ನ ಸಹೋದ್ಯೋಗಿಗಳಾದ ಶ್ರೀ ಕೆ. ಎಮ್. ಶಂಭುಶರ್ಮ, ಶ್ರೀ ಟಿ. ಎನ್. ವೆಂಕಟೇಶಮೂರ್ತಿ, ನನ್ನ ಸಹೋದರರಾದ ಶ್ರೀ ಡಿ. ಎಸ್. ಕೃಷ್ಣರಾವ್ ಮತ್ತು ಶ್ರೀ. ಡಿ. ಎಸ್. ನಾಗರಾಜರಾವ್ ಇವರೆಲ್ಲರಿತ್ತ ನೆರವಿಗೆ ಹೃತ್ಪೂರ್ವಕ ಧನ್ಯವಾದಗಳನ್ನು ಅರ್ಪಿಸುತ್ತೇನೆ.

ಧಾರವಾಡ–580005 **ಡಿ. ಎಸ್. ಗುಂಡೂರಾವ**

ಪರಿವಿಡಿ

ಬೀಜಗಣಿತ ಪರಿಚಯ

(ಭಾಗ - 1)

ಸಂಕೇತಗಳ ವಿವರಣೆ

ಸಂಕೇತ	ಪುಟ	ವಿವರಣೆ
$\in$	4	1·11
$\notin$	4	1·11
$\subset$	4	1·12
$\supset$	4	1·12
$\not\subset$	5	1·13
Φ	6	1·20
$\cup$	7	1·24
$\cap$	8	1·29
A'	10	1·35
N	15	2·1
I	15	2·2
F	16	2·3
R	20	2·13
I_+	21	ಉದಾ :
$<$	29	2·31
$\lvert X \rvert$	33	2·42
C	35	2·48
aRb	44	3·9
$c \sim R_d$	44	3·9
$a \mid b$	45	3·10
$f:A \rightarrow B$	49	3·14
$\dashrightarrow$ $\dashrightarrow$	49	3·15(i)
$\overline{3}$	97	6·15
$\Rightarrow$	108	7·2
$\triangle$	115	7·11
A.P.	133	8·3
A.M.	135	8·7
G.P	142	8·13
G.M	143	8·18
H.P	152	8·25
H.M	152	8·26
Σ	160	8·33

ಗಣಸಿದ್ಧಾಂತ

1.1 ಗಣ ಎಂದರೇನು ?

ವಸ್ತುಗಳ, ಭಾವನೆಗಳ ಅಥವಾ ಸಂಕೇತಗಳ ಸಮುದಾಯಕ್ಕೆ ಗಣ ಎಂದು ಕರೆಯಬಹುದು. ಈ ಕೆಳಗೆ ಕೆಲವು ಗಣಗಳ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

A : ನಿಮ್ಮ ತರಗತಿಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು.
B : ನಿಮ್ಮ ಶಾಲೆಯ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ಬೋಧಕರು.
C : ಕರ್ನಾಟಕ ರಾಜ್ಯದಲ್ಲಿರುವ ಜಿಲ್ಲೆಗಳು.
D : ನಿಮ್ಮ ಶಾಲೆಯ ಪುಸ್ತಕಭಂಡಾರದಲ್ಲಿರುವ ಪುಸ್ತಕಗಳು.
E : ನಿಮ್ಮ ಬಳಿಯಿರುವ ಉಡುಪುಗಳು.
*F : ಎಣಿಕೆಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು : 1, 2, 3, 4, 5, 6, . . .
G : ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು : 0, 1, −1, 2, −2, 3, −3, . . .

ಮೇಲೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ (A ಯಿಂದ G ವರೆಗೆ) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಹೇಳಿಕೆಯೂ ಒಂದು ಗಣವನ್ನು ನಿರ್ಣಯಿಸುತ್ತದೆ.

1.2 ವ್ಯಾಖ್ಯೆ : ಮೇಲೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ A ಗಣವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. ಇಲ್ಲಿ ತರಗತಿಯ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯನ್ನು A ಗಣದ **ಗಣಾಂಶ**ವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಎಲ್ಲಾ ಗಣಾಂಶಗಳ ಸಮುದಾಯವೇ ಗಣವಾಗುತ್ತದೆ. ಯಾವ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೂ, ಅದು F ಗಣದ ಗಣಾಂಶವಾಗುತ್ತದೆ.

1.3 ಗಣಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಕ್ರಮ : ಗಣಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ಎರಡು ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಅನುಸರಿಸುತ್ತೇವೆ:

---

* ಇದರಲ್ಲಿ 6ರ ನಂತರ ಬರುವ ಮೂರು ಚುಕ್ಕೆಗಳ ವಿವರಣೆಗೆ 1.8 ರಲ್ಲಿ ಬರುವ ಉದಾ ನೋಡಿ.

(i) **ಪಟ್ಟಿವಿಧಾನ** (ii) **ಗುಣವಿಧಾನ.**

1.4 **ಪಟ್ಟಿ ವಿಧಾನ : ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಗಣವನ್ನು ಆ ಗಣದಲ್ಲಿರುವ ಗಣಾಂಶಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ಪುಷ್ಪಾವರಣದಲ್ಲಿ ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡುವುದರಿಂದ ಸೂಚಿಸಬಹುದು.**

ಉದಾ : A ಎಂಬುದು 5 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣವಾದರೆ, ಅದನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕಂಡಂತೆ ಬರೆಯಬಹುದು:

$$A = \{ 1, 2, 3, 4 \} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (1\cdot 4\cdot 1)$$

ಅಥವಾ

$$A = \{ 3, 2, 1, 4 \} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (1\cdot 4\cdot$$

1.5 **ಟೀಕೆ** : (1· 4· 1) ಮತ್ತು (1· 4· 2) ಸೂಚಿಸುವ ಗಣಗಳು ಒಂದೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ. **ಆದ್ದರಿಂದ ಗಣಗಳ ನಿರೂಪಣೆಯಲ್ಲಿ ಗಣಾಂಶಗಳನ್ನು ಬರೆಯುವ ಅನುಕ್ರಮವು ಮುಖ್ಯವಲ್ಲ.**

1.6 **ಗುಣವಿಧಾನ : ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಗಣವನ್ನು, ಆ ಗಣದ ಎಲ್ಲಾ ಗಣಾಂಶಗಳೂ ಹೊಂದಿರುವ ಸಾಮಾನ್ಯಗುಣವನ್ನು ಹೇಳುವುದರಿಂದ ಸೂಚಿಸಬಹುದು.**

ಉದಾ : ಎಲ್ಲಾ ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣವು N ಆದರೆ, ಈ ಗಣವನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬರೆಯಬಹುದು:

N={ಎಲ್ಲಾ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು}

ಅಥವಾ N={x ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕವಾದಾಗ, ಎಲ್ಲಾ xಗಳ ಸಮುದಾಯ}.

ಇದನ್ನು ಸಂಕೇತದಲ್ಲಿ :

N = {x|x=ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕ} ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಪಟ್ಟಿವಿಧಾನದಲ್ಲಿ N ಗಣವನ್ನು

$N = \{ 1, 2, 3, \dots \}$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

1.7 ವ್ಯಾಖ್ಯೆ: ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಗಣದಲ್ಲಿ ಬರುವ ಎಲ್ಲಾ ಗಣಾಂಶಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು n(=.ಒಂದು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ) ಆದರೆ, ಆಗ ಅದನ್ನು **ಪರಿಮಿತಗಣವೆಂದು** ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾ : (a) W ಎಂಬುದು ವಾರದ ಹೆಸರುಗಳ ಗಣವಾದರೆ, W={ಸೋಮವಾರ, ಮಂಗಳವಾರ, ಬುಧವಾರ, ಗುರುವಾರ, ಶುಕ್ರವಾರ, ಶನಿವಾರ,

ಭಾನುವಾರ } ಎಂಬುದು ಒಂದು ಪರಿಮಿತಗಣವಾಗುತ್ತದೆ. **ಈ** ಗಣದಲ್ಲಿ ಏಳು ಗಣಾಂಶಗಳಿವೆ.

(b) A={1, 2, 3, 5, 7, 9, 11 } ಎಂಬುದು ಒಂದು ಪರಿಮಿತ ಗಣ [ಏಕೆ?].

(c) ಭಾರತದಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಪಟ್ಟಣಗಳ ಗಣವು ಒಂದು ಪರಿಮಿತ ಗಣವಾಗುವುದೆಂದರೆ ನೀವು ಒಪ್ಪುವಿರಾ ?

1.8 **ವ್ಯಾಖ್ಯೆ :** ಪರಿಮಿತವಲ್ಲದ ಯಾವುದೇ ಒಂದುಗಣವನ್ನು **ಅಪರಿಮಿತಗಣ**ವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾ : ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣವಾದ N = {1, 2, 3, 4, 5, 6, . . . } ಎಂಬುದು ಒಂದು ಅಪರಿಮಿತ ಗಣವಾಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ 6 ರ ನಂತರ ಬರುವ ಮೂರು ಚುಕ್ಕೆಗಳು 6ರ ಅನಂತರ 7; 7ರ ನಂತರ 8; 8 ರ ನಂತರ 9, ಹೀಗೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಕೊನೆಯಿಲ್ಲದೆ ಬರುತ್ತವೆಂಬುದನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಅಪರಿಮಿತಗಣವನ್ನು **ಅನಂತ ಗಣ**ವೆಂದೂ ಕರೆಯಬಹುದು.

1.9 **ಟೀಕೆ :** ಎಲ್ಲಾ ಗಣಾಂಶಗಳು ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಗುಣವನ್ನು ಹೊಂದಿಲ್ಲವದರೆ, ಅಂತಹ ಗಣಾಂಶಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಗಣವನ್ನು ಗುಣವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸಲು ಅಸಾಧ್ಯ. ಇದು ಮುಂದೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ Sಎಂಬ ಗಣದಿಂದ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುತ್ತದೆ.

S= { ಧಾರವಾಡ, ಸೂಜಿ, ಲೇಖನಿ, 2 }.

1.10 **ಟೀಕೆ :** ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಗಣಗಳನ್ನು A, B, C ಮೊದಲಾದ ದೊಡ್ಡ ಅಕ್ಷರಗಳಿಂದಲೂ ಮತ್ತು ಈ ಗಣಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಪಟ್ಟ ಗಣಾಂಶಗಳನ್ನು, ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ a, b, c ಇತ್ಯಾದಿ ಸಣ್ಣ ಅಕ್ಷರಗಳಿಂದಲೂ ಸೂಚಿಸುವುದು ರೂಢಿಯಲ್ಲಿದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 1.1

1. ಗಣ ಎಂದರೇನು ?
2. ಗಣಗಳ ಆರು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಕೊಡಿರಿ.
3. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಗಣಗಳನ್ನು ಪಟ್ಟಿವಿಧಾನಲ್ಲಿ **ಬರೆಯಿರಿ:**
   (i) $A=\{a|a=$ ಎಣಿಕೆಯ ಸಂಖ್ಯೆ$\}$.
   (ii) $B=\{b|b<10$ ಮತ್ತು ಪೂರ್ಣಾಂಕ$\}$.
   (iii) $D=\{d|d=$ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆ$>1\}$.

(iv) $E=\{e|e=x^2,\ x=$ಪೂರ್ಣಾಂಕ$\}$.

(v) $F=\{f|f<10$ ಮತ್ತು $f>11\}$ **ಈ ಗಣದ ನಿರೂಪಣೆಯನ್ನು ಹೇಗೆ ಮಾಡುವಿರಿ ?.**

(vi) $C=\{c|c=$ಮೈಸೂರು ರಾಜ್ಯದ ಜಿಲ್ಲೆ$\}$.

4. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಗಣಗಳನ್ನು ಗುಣವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ:

(i) $A=\{2, 4, 6, \ldots\}$

(ii) $B=\{3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$

(iii) $C=\{6, 8, 10, \ldots\}$

(iv) $D=\{1^3, 2^3, 3^3, \ldots\}$

(v) $E=\{1,-1,\ 2,-2,\ 3,-3 \ldots\}$

❖ ❖ ❖

1.11 A ಎಂಬುದು ಯಾವದೇ ಒಂದು ಗಣವಾದರೆ, a Aಯ ಗಣಾಂಶವೆಂಬುದನ್ನು $a\in A$(a ಯು Aಯ ಗಣಾಂಶವೆಂದು ಓದಿರಿ) ಎಂಬ ಸಂಕೇತದಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

b Bಯ ಗಣಾಂಶವಲ್ಲದಿದ್ದರೆ, $b \notin B$ (b ಯು B ಗಣದ ಗಣಾಂಶವಲ್ಲವೆಂದು ಓದಿರಿ) ಎಂಬ ಸಂಕೇತದಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾ : $A=\{2, 4, 6, 8, 10\}$. ಇದರಲ್ಲಿ $2\in A$ ಮತ್ತು $1\notin A$ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ.

1.12 ವ್ಯಾಖ್ಯೆ : A ಗಣದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗಣಾಂಶವೂ B ಗಣದ ಗಣಾಂಶವೂ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ A ಗಣವನ್ನು B ಗಣದ ಉಪಗಣವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಸಂಕೇತದಲ್ಲಿ $A\subset B$ (Aಯು Bಯ ಉಪಗಣವೆಂದು ಓದಿ) ಅಥವಾ $B\supset A$ (Bಯು Aಗಣವನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದೆಯೆಂದು ಓದಿ) ಎಂದು ಬರೆದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

1.13 **ಉದಾ :** (a) $A=\{2, 4, 5, 6, 7, 8\} \ldots$ (1.13.1)

$B=\{2, 5, 7\} \ldots$ (1.13.2)

ಎಂಬ ಗಣಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. Bಗಣದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗಣಾಂಶವೂ A ಗಣದ ಗಣಾಂಶವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ Bಯು Aಯ ಉಪಗಣ. ಇದನ್ನು ಸಂಕೇತ ದಲ್ಲಿ, $B \subset A$ ಅಥವಾ $A \supset B$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

(b) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ಮತ್ತು

$B = \{1, 2, 6, 7, 8\}$ ಗಣಗಳಲ್ಲಿ

$B \not\subset A$ ಮತ್ತು $A \not\subset B$ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ. ಅಂದರೆ B A ಯ 1ಉಪಗಣವಲ್ಲ; A Bಗಣದ ಉಪಗಣವಲ್ಲ.

1.14 **ಉದಾ :** $A = \{1, 2, \{3\}, 4, 5\}$ ಆದರೆ ಕೆಳಗೆ **ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಹೇಳಿ** ಕೆಗಳು ಯುಕ್ತವೆ ? ಇಲ್ಲವಾದರೆ ಏಕೆಂದು ಸಮರ್ಥಿಸಿರಿ.

(i) $\{1, 2\} \subset A$ (ii) $\{3\} \subset A$ (iii) $4 \in A$

(iv) $3 \notin A$ (v) $\{3\} \in A$.

ಉತ್ತರ : (i) ಯುಕ್ತ (ii) ಅಯುಕ್ತ, ∵ {3} Aಯ ಒಂದು ಗಣಾಂಶ ವಾಗಿದೆಯಲ್ಲದೆ ಉಪಗಣವಾಗಿಲ್ಲ. (∵ ಈ ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ಏಕೆಂದರೆ ಎಂದು ಓದಿರಿ) (iii) ಯುಕ್ತ (iv) ಅಯುಕ್ತ, ∵ 3 A ಯ ಗಣಾಂಶವಲ್ಲ (v) ಯುಕ್ತ.

ಟೀಕೆ : ಒಂದೇ ಒಂದು ಗಣಾಂಶವುಳ್ಳ ಗಣವನ್ನು **ಏಕಾಂಶಗಣ**ವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾ : {o} ಒಂದು ಏಕಾಂಶಗಣವೆಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ.

1.15 **ಟೀಕೆ :** (1.13.1) ಮತ್ತು (1.13.2) ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಗಣಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. ಇಲ್ಲಿ Aಗಣದ ಗಣಾಂಶಗಳಾದ 4, 6 ಮತ್ತು 8 ಇವುಗಳನ್ನು Aಯಿಂದ ವಿಸರ್ಜಿಸಿದರೆ Bಗಣವು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಇದರಿಂದ ತಿಳಿಯುವ ವಿಷಯ : **ಯಾವುದೇ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಗಣದ ಕೆಲವು ಗಣಾಂಶಗಳನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಬರೆದರೆ, ಆ ಗಣದ ಉಪಗಣ** ವೊಂದು ದೊರೆಯುತ್ತದೆಯೆಂಬುದನ್ನು ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡೋಣ.

1.16 **ಟೀಕೆ :** $A \subset A$ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ (ಏಕೆ?).

1.17 **ವ್ಯಾಖ್ಯೆ : ಸಮತ್ವ : A ಮತ್ತು B ಗಳು ಯಾವುದೇ ಎರಡು ದತ್ತ ಗಣಗಳಾಗಿರಲಿ. Aಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗಣಾಂಶವೂ Bಯ ಗಣಾಂಶವಾದಾಗ, Bಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗಣಾಂಶವೂ Aಯ ಗಣಾಂಶ ವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ A ಮತ್ತು Bಗಳೆರಡೂ ಒಂದೇ ಗಣವನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸುತ್ತವೆ.** ಇದನ್ನು $A = B$ ಎಂದು ಬರೆದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

1.18 **ಟೀಕೆ :** $A=B$ ಎಂಬುದನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಲು, $A\subset B$ ಮತ್ತು $B\subset A$ ಎಂಬುದನ್ನು ತಾಳೆ ನೋಡುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾ : $A=\{1, 2, 5, 7, 8\}$, $B=\{8, 5, 2, 1, 7\}$ ಮತ್ತು $C=\{1, 1, 5, 8, 2, 2, 7, 5, 7\}$ ಎಂದಿರಲಿ. $A=B=C$ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ. A ಮತ್ತು Bಗಳೆರಡೂ ಒಂದೇ ಗಣಾಂಶಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡಿರುವುದರಿಂದ, $A=B$. B ಮತ್ತು Cಗಳೆರಡೂ ಸಹ ಒಂದೇ ಗಣಾಂಶಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ! (ಏಕೆ ?) ಆದ್ದರಿಂದ $B=C$, ಅಂದರೆ, $A=B=C$.

1.19 **ಶೂನ್ಯಗಣ** :$A=\{2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ಎಂದಿರಲಿ. A ಯಿಂದ K (=ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ) ಗಣಾಂಶಗಳನ್ನು ವಿಸರ್ಜಿಸಿದಾಗ ದೊರೆಯುವ ಉಪಗಣವನ್ನು (1.15 ಟೀಕೆ ನೋಡಿರಿ) A_K ಎಂದು ಸೂಚಿಸೋಣ.

ಆಗ, $A=A_0=\{2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

$A_1=\{2, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

$A_2=\{2, 4, 5, 6, 7\}$.

$A_3=\{2, 4, 5, 6\}$.

$A_4=\{2, 4, 5\}$.

$A_5=\{2, 4\}$.

$A_6=\{2\}$

$A_7=\{\ \}$.

ಇಲ್ಲಿ $A_7\subset A_6\subset A_5\subset A_4\subset A_3\subset A_2\subset A_1\subset A_0=A$ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ. ಇಲ್ಲಿ ಹೇಳಿರುವ A_7 ಗಣವನ್ನು **ಶೂನ್ಯಗಣ**ವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

1.20 ವ್ಯಾಖ್ಯೆ : ಯಾವ ಗಣವು ಗಣಾಂಶಗಳನ್ನು ಪಡೆದಿರುವುದಿಲ್ಲವೊ, ಆ ಗಣವನ್ನು **ಶೂನ್ಯ ಗಣ**ವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಶೂನ್ಯಗಣವನ್ನು $\emptyset$ ('ಫೈ' ಎಂದು ಓದಿರಿ) ಎಂಬ ಸಂಕೇತದಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

1.21 **ಉದಾ :** (a) $A=\{x/x=$ ವಾರದ ಎಂಟನೆಯದಿನ$\}$. ಒಂದು ವಾರದಲ್ಲಿ 7 ದಿನಗಳು ಮಾತ್ರವಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಯಾವ ವಾರದಲ್ಲೂ ಎಂಟನೆಯ ದಿನವೆಂಬುದು ಇರಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಅಂದರೆ, Aಯಲ್ಲಿ ಗಣಾಂಶವೇ ಇಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ Aಯು ಶೂನ್ಯಗಣ, ಅಂದರೆ $A=\emptyset$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

(b) $B=\{x|x=$ ಎರಡರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವ ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆ$\}$ ಆದರೆ, $B=\varnothing$.

(c) $C=\{y|y=$ ಛೇದಿಸುವ ಸಮಾನಾಂತರ ರೇಖೆಗಳು$\}$ ಆದರೆ. $C=\varnothing$.

(d) $D=\{z|z=4$ ಶಿರೋಬಿಂದುಗಳಿರುವ ತ್ರಿಭುಜ$\}$ ಆದರೆ, $D=\varnothing$,

1.22 **ಟೀಕೆ : ಶೂನ್ಯಗಣವನ್ನು ಎಲ್ಲಾ ಗಣಗಳ ಉಪಗಣವೆಂದು ಒಪ್ಪಿಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ.** ಅಂದರೆ X ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಗಣವಾದರೆ, $X\supset\varnothing$ ಎಂಬುದನ್ನು ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡೋಣ.

1.23 **ಗಣಗಳಲ್ಲಿನ ಆಚರಣೆಗಳು :** ಗಣಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ **ಸಂಯೋಗ, ಛೇದನ** ಮತ್ತು **ಪೂರಕ** ಎಂಬ ಆಚರಣೆಗಳನ್ನು ವಿವರಿಸುತ್ತೇವೆ.

1.24 **ವ್ಯಾಖ್ಯೆ : A ಮತ್ತು B ಗಣಗಳ ಸಂಯೋಗವು Aಗೆ ಅಥವಾ Bಗೆ ಅಥವಾ ಅವೆರಡಕ್ಕೂ ಸೇರಿರುವ ಗಣಾಂಶಗಳ ಗಣ.** ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ ಇದನ್ನು $A\cup B$ (A ಸಂಯೋಗ B ಎಂದು ಓದಿರಿ) ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

1.25 **ಟೀಕೆ :** $A\cup B=\{x|x\ni A$ ಅಥವಾ $x\ni B\}$ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ.

1.26 **ಉದಾ :** (a) $A=\{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ಮತ್ತು

$B=\{1, 2, 5, 7\}$ ಎಂದಿರಲಿ,

ಇಲ್ಲಿ $A\cup B=\{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8\}$,

(b) $A=\{x^2|x=$ ಪೂರ್ಣಾಂಕ$\}$ ಮತ್ತು

$B=\{x|x=$ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ$\}$ ಆದರೆ

$A\subset B$ ಮತ್ತು $A\cup B=B$ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ.

(c) $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,

$B=\{+2, +4, +6\}$,

$C=\{+2, -4, +6\}$ ಮತ್ತು

$D=\{-4, -5, -6\}$ ಎಂದಿರಲಿ.

ಆಗ $A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}=A$

$A\cup D=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, -4, -5, -6\}$.

$A\cup C=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, -4\}$.

1.27 **ಪ್ರಮೇಯ: A, Bಗಳು ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಗಣಗಳಾದರೆ,**

$A\cup B=B\cup A$.

ಸಾಧನೆ :

$x \in A \cup B$ ಆದರೆ, $x \in A$ ಅಥವಾ $x \in B$. ಅಂದರೆ $x \in B$ ಅಥವಾ $x \in A$.

$$\therefore\ x \in B \cup A$$

ಆದ್ದರಿಂದ $A \cup B \subset B \cup A$ (ಏಕೆ ?). ಇದೇ ರೀತಿ $B \cup A \subset A \cup B$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ $A \cup B = B \cup A$ (1.18 ಟೀಕೆಯಿಂದ).

1.28 **ಪ್ರಮೇಯ:** A, B, C, ಗಳು ಯಾವುದೇ ಮೂರು ಗಣಗಳಾದರೆ, $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

ಸಾಧನೆ : $x \in (A \cup B) \cup C$ ಎಂದಿರಲಿ.

ಇದರಿಂದ $x \in (A \cup B)$ ಅಥವಾ $x \in C$

ಅಂದರೆ $x \in A$ ಅಥವಾ $x \in B$ ಅಥವಾ $x \in C$

$x \in A$ ಅಥವಾ ($x \in B$ ಅಥವಾ $x \in C$)

$x \in A$ ಅಥವಾ ($x \in B \cup C$)

$\therefore\ x \in A \cup (B \cup C)$

$\therefore\ (A \cup B) \cup C \subset A \cup (B \cup C)$

ಇದೇ ರೀತಿ $A \cup (B \cup C) \subset (A \cup B) \cup C$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

1.29 **ವ್ಯಾಖ್ಯೆ:** A ಮತ್ತು B ಗಣಗಳೆರಡರ ಗಣಾಂಶಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಗಣವನ್ನು A ಮತ್ತು B ಗಳ ಛೇದನವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಸಂಕೇತದಲ್ಲಿ ಇದನ್ನು $A \cap B$ (A ಛೇದನ B ಎಂದು ಓದಿರಿ) ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

1.30 **ಟೀಕೆ** : $A \cap B = \{x | x \in A$ ಮತ್ತು $x \in B\}$ ಎಂಬುದನ್ನು ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡೋಣ.

1.31 **ಉದಾ** : A, B, C. ಗಳು 1.26 ಉದಾ : (c) ನಂತಿರಲಿ.

ಆಗ $A \cap B = \{2, 4, 6\}$; $A \cap C = \{2, 6\}$;

$B \cap C = \{2, 6\}$; $C \cap D = \{-4\}$;

$A \cap D = \varnothing$.

1.32 ಪ್ರಮೇಯ : A, B ಗಳು ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಗಣಗಳಾದರೆ, $A \cap B = B \cap A$.

ಸಾಧನೆ : $x \in A \cap B$ ಎಂದರೆ $x \in A$ ಮತ್ತು $x \in B$.

ಅಥವಾ $x \in B$ ಮತ್ತು $x \in A$

$\therefore\ x \in B \cap A$

ಅಂದರೆ $A \cap B \subset B \cap A$ ಎಂದಾಯ್ತು.

ಇದೇ ರೀತಿ $B \cap A \subset A \cap B$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

$\therefore\ A \cap B = B \cap A$.

1.33 ಪ್ರಮೇಯ : A, B, C ಗಳು **ಯಾವುದೇ ಮೂರು ಗಣಗಳಾದರೆ** $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

ಸಾಧನೆ : $x \in (A \cap B) \cap C$ ಎಂದಿರಲಿ.

ಇದರಿಂದ, $x \in A \cap B$ ಮತ್ತು $x \in C$.

ಅಥವಾ $x \in A$ ಮತ್ತು $x \in B$ ಮತ್ತು $x \in C$.

ಅಂದರೆ $x \in A$ ಮತ್ತು $(x \in B$ ಮತ್ತು $x \in C)$.

ಅಥವಾ $x \in A$ ಮತ್ತು $x \in B \cap C$.

ಇದರಿಂದ $x \in A \cap (B \cap C)$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

$\therefore\ (A \cap B) \cap C \subset A \cap (B \cap C)$

ಇದೇ ರೀತಿ $A \cap (B \cap C) \subset (A \cap B) \cap C$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

ಆದ್ದರಿಂದ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

1.34 ವ್ಯಾಖ್ಯೆ : ಗಣಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ವಿಚಾರ ಮಾಡುವಾಗ U ಎಂಬ ಮೊದಲೇ ನಿರ್ಣಯವಾದ ಒಂದು ಗಣದ ಉಪಗಣಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ ನಾವು ಪರಿಶೀಲನೆ ಮಾಡಬಯಸುವ ಗಣಗಳ ಗಣಾಂಶಗಳೆಲ್ಲಾ U ಗಣದ ಗಣಾಂಶಗಳಾಗಿರಲೇ ಬೇಕು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಹೇಳುವುದಾದರೆ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಗಳನ್ನು ಗಣಾಂಶವಾಗಿ ಹೊಂದಿರುವ ಪರಿಮಿತಗಣಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸುವಾಗ ಅದಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ವಿಶ್ವಗಣ U= ಎಲ್ಲಾ ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಗಣ N ಎಂಬುದು ಸುಲಭವಾಗಿ ಗೊತ್ತಾಗುತ್ತದೆ. (ಹೇಗೆ ? ಸಮರ್ಥಿಸಿರಿ).

ಎಲ್ಲಾ ಗಣಗಳನ್ನು ಉಪಗಣವಾಗಿ ಹೊಂದಿರುವ ಗಣವೇ ವಿಶ್ವಗಣ. ಇದನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ U ಎಂಬ ಅಕ್ಷರದಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

1.35 **ವ್ಯಾಖ್ಯೆ** : A ಗಣಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ವಿಶ್ವಗಣ U ಆಗಿರಲಿ. U ಗಣದಿಂದ A ಗಣದ ಗಣಾಂಶಗಳನ್ನೆಲ್ಲಾ ವಿಸರ್ಜಿಸಿದಾಗ ದೊರೆಯುವ ಗಣವನ್ನು A ಯ ಪೂರಕ ಗಣವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಸಂಕೇತದಲ್ಲಿ A ಯ ಪೂರಕ ಗಣವನ್ನು A' ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದರಿಂದ

$$A' = \{ x | x \in U \text{ ಮತ್ತು } x \notin A \}$$

ಎಂಬುದನ್ನು ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡೋಣ.

1.36 **ಉದಾ** : (a) $U = \{ 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 \}$

ಮತ್ತು $A = \{ 6,7,8,9,10 \}$ ಆದಾಗ,

A ಯ ಪೂರಕ ಗಣ $= A' = \{ 1,2,3,5,4 \}$ ಆಗುತ್ತದೆ.

(b) $U = \{ 1,2,3,4, \ldots \}$ ಮತ್ತು $N = \{ 2,4,6, \ldots$

ಆದರೆ $N' = \{ 1,3,5, \ldots \}$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಟೀಕೆ : ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ, $A \cup A' = U$ ಮತ್ತು $N \cup N' = U$ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ.

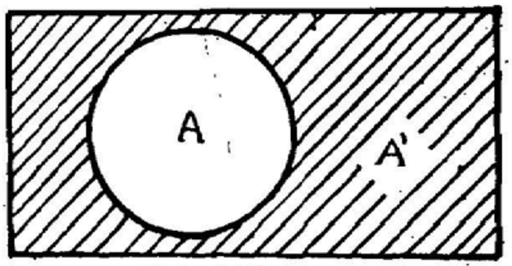
1.37 **ಟೀಕೆ**: $A \subset U$ ($U =$ ವಿಶ್ವಗಣ) ಆದಾಗ, ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ತಾಳೆ ನೋಡಬಹುದು.

(i) $A \cup A' = U$ (ii) $A \cap A' = \varnothing$

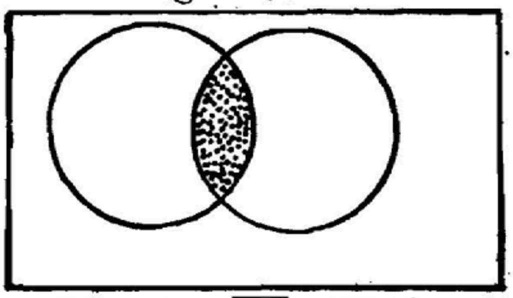
(iii) $\varnothing' = U$ (iv) $U' = \varnothing$

(v) $(A')' = A$.

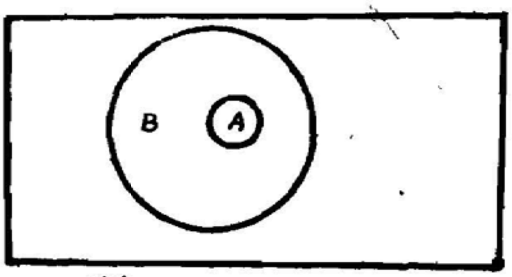
1.38 ವೆನ್ ಚಿತ್ರಗಳು : ಉಪಗಣಗಳಿಗೂ ಮತ್ತು ಅವಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ವಿಶ್ವಗಣಕ್ಕೂ ಇರುವ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಲು ವೆನ್ ಚಿತ್ರಗಳು ಸಹಕಾರಿಯಾಗುತ್ತವೆ. ವಿಶ್ವಗಣವನ್ನು ಒಂದು ಆಯದ ಒಳಪ್ರದೇಶದಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಉಪಗಣಗಳನ್ನು ಆಯದ ಒಳಗಿರುವ ಒಂದು ಆವೃತ ರೇಖೆಯ ಒಳಪ್ರದೇಶದಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಚಿತ್ರ (1.38.1) ರಲ್ಲಿ ವಿಶ್ವಗಣ U ವನ್ನು ಆಯದ ಒಳಪ್ರದೇಶದಿಂದಲೂ ಮತ್ತು ಉಪಗಣ Aಯನ್ನು ವೃತ್ತದ ಒಳಪ್ರದೇಶದಿಂದಲೂ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ. Aಯ ಪೂರಕಗಣ A'ನ್ನು ಸಮಾನಾಂತರ ಗೆರೆಗಳಿಂದ ಆಯದ ಒಳಪ್ರದೇಶದಲ್ಲಿ ಗುರ್ತಿಸಲಾಗಿದೆ. (1.38.2) (1.38.3), (1.38.4) ಮತ್ತು (1.38.5) ಈ ಚಿತ್ರಗಳು A ಮತ್ತು B ಎಂಬ ಎರಡು ಉಪಗಣಗಳ ನಡುವೆ ಇರಬಹುದಾದ ಕೆಲವು ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತವೆ.



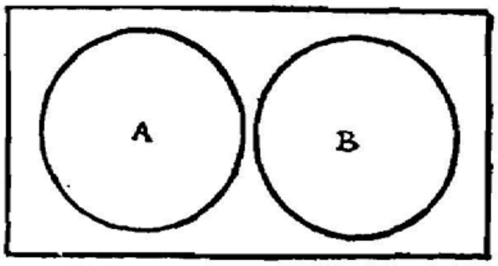
ಚಿತ್ರ : 1.38.1



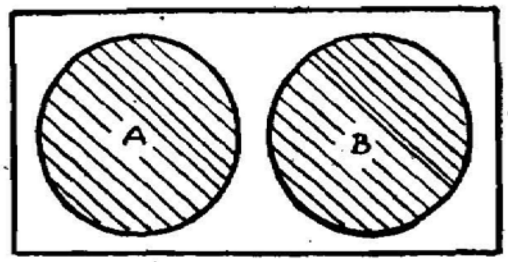
ಚಿತ್ರ : 1.38.2 : $A \cap B \neq \phi$



ಚಿತ್ರ : 1.38.3 $A \subset B$



ಚಿತ್ರ: 1. 38. 4 $A \cap B = \phi$



ಚಿತ್ರ: 1. 38. 5 ▧ : $A \cup B$

1.39 ಡಿಮೋರ್ಗನನ ನಿಯಮಗಳು : A, B ಗಳು ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಗಣಗಳಾದರೆ (i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

(ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

ಸಾಧನೆ : (i) ಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ :

$x \in (A \cup B)'$ ಆದಾಗ $x \notin A \cup B$ (ಏಕೆ?)

ಅಂದರೆ $x \notin A \cap B$

$\therefore$ $x \notin A$ ಮತ್ತು $x \notin B$

ಅಂದರೆ $x \in A'$ ಮತ್ತು $x \in B'$

$\therefore$ $x \in A' \cap B'$

$\therefore$ $(A \cup B)' \subset A' \cap B'$

ಇದೇ ರೀತಿ $(A' \cap B') \subset (A \cup B)'$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

$\therefore$ $(A \cup B') = A' \cap B'$.

(ii) ಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ :

$x \in (A \cap B)'$ ಎಂದಿರಲಿ ಆಗ $x \notin A \cap B$

ಅಂದರೆ $x \notin A$ ಅಥವಾ $x \notin B$ ಎಂಬುದು ಯುಕ್ತ.

$x \in A'$ ಅಥವಾ $x \in B'$

$\therefore \quad x \in A' \cup B'$

$\therefore \quad (A \cap B)' \subset A' \cup B'$

ಇದೇ ರೀತಿ $A' \cup B' \subset (A \cap B)'$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬಹುದು,

$\therefore \quad (A \cap B)' = A' \cup B'$

❖ ❖ ❖

ಅಭ್ಯಾಸ 1.2

1. $A = \{2, 4, 6, 7, 8, 10, 12\}$ ಆದರೆ A ಯ ಉಪಗಣಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

2. $A = \{2, 4, 6, 8\}$ ಮತ್ತು $B = \{1, 3, 5, 8\}$ ಆದರೆ
(i) $A \cup B = ?$ (ii) $A \cap B = ?$

3. $A_K = \{1, 2, 3, 4, \ldots K\}$ ಆದರೆ, ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿರಿ:

(i) $A_1 \cup A_2 = A_2$ (ii) $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = A_3$, ಇತ್ಯಾದಿ.

(iii) $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_K = A_K$.

(iv) $A_1 \cup A_2 \cdots A_{k-1} \cap A_k = \{1\}$.

4. ವಿಶ್ವಗಣ $U = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$ ಎಂದಿರಲಿ.

$A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{4, 6, 8\}$, $C = \{6, 8, 10\}$,

$D = \{8, 10, 12\}$, $E = \{10, 12, 14\}$, $F = \{12, 14, 16\}$, $G = \{14, 16, 18\}$, $H = \{16, 18, 20\}$, ಎಂದಿರಲಿ.

ಈ ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿರುವ ಗಣಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $A \cup B$, $A \cup C$, $A \cup D$, $A \cup E$, $A \cup F$, $A \cup G$.

(ii) $A \cap B$, $A \cap C$, $A \cap D$, $B \cap C$, $B \cap D$, $B \cap E$, $C \cap E$, $C \cap F$, $C \cap H$, $D \cap E$, $D \cap H$.

(iii) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$, $(A \cap B) \cup (A \cap D)$, $(A \cap B) \cup (A \cap C')$, $(A \cap B) \cup (C \cap D)$, $(A \cap D) \cup (D \cap H)$.

5. U, A, B, C, D, E, F, ಗಳು ಮೇಲಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿರುವಂತೇ ಇರುವಾಗ, ಕೆಳಗೆ ಸೂಚಿಸಿರುವ ಗಣಗಳನ್ನು ಪಟ್ಟಿವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

(i) A', B', C', E', F'. (ii) $(A \cup B)'$, $(A \cup C)'$, $(A \cup D)'$. (iii) $(A \cap D)' = (E \cap H)' = (B \cap E)'$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(iv) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ ಮತ್ತು $(A \cap B)' = A' \cup B'$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

6. A, B, C ಗಳು ಶೂನ್ಯಗಣದಿಂದ ಭಿನ್ನವಾಗಿರಲಿ. ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ವೆನ್ ಚಿತ್ರ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ತಾಳೆನೋಡಿರಿ.

(i) $A \cap B = B \cap A$. (ii) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

(iii) $A \cup B = B \cup A$. (iv) $A \cup (B \cup C) = A \cup (B \cup C)$,

(v) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

(vi) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

7. 1.37 ಟೀಕೆಯನ್ನು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

— o —

2

ಸಂಖ್ಯಾವ್ಯೂಹ

2.1 ವ್ಯಾಖ್ಯೆ : ಎಣಿಕೆಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದ 1,2,3, . . . ಇವುಗಳು ಗಣಾಂಶಗಳಾಗಿರುವ ಗಣವನ್ನು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು

$$† \ N=\{1,2,3, \ . \ . \ .\} \qquad (2.1.1)$$

ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ಸಂಕೇತವನ್ನು ಮುಂದೆ ಪುಸ್ತಕದುದ್ದಕ್ಕೂ ಮುಂದುವರಿಸಿದ್ದೇವೆ.

2.2 ವ್ಯಾಖ್ಯೆ : ಎಲ್ಲಾ ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು, ಋಣ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳೂ ಮತ್ತು ಶೂನ್ಯ ಇವುಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡ (ಅಂದರೆ ಗಣಾಂಶವಾಗಿ ಪಡೆದಿರುವ) ಗಣವನ್ನು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ಗಣವನ್ನು ಇನ್ನು ಮುಂದೆ I ಎಂಬ ಸಂಕೇತದಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ

$$I=\{. \ . \ . ,-3, -2, -1, 0, \ 1, 2, 3, . \ . \ .\} \qquad (2.2.1)$$

ಎಂಬುದನ್ನು ನೆನಪಿಡೋಣ. ಈ ಸಂಕೇತವನ್ನು ಪುಸ್ತಕದುದ್ದಕ್ಕೂ ಮುಂದುವರಿಸಲಾಗಿದೆ.

2.3 ವ್ಯಾಖ್ಯೆ : $q \neq 0$ ಮತ್ತು $p \in I$, $q \in I$ ಅಂಬೋಣ. ಈಗ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು $\frac{p}{q}$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾದರೆ, ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾ : (i) $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $-\frac{2}{7}$, $-\frac{6}{5}$, ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದೂ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ.

(ii) ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಕೂಡ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿವೆ. ಏಕೆಂದರೆ, $2=\frac{2}{1}$, ಇಲ್ಲಿ $p=2$, $q=1$. ಇದೇ ರೀತಿ 1, 0, −7 ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ $\frac{1}{1}$, $\frac{0}{8}$, $-\frac{7}{1}$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

---

† ಈ ಗಣವನ್ನು ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞ ಲಿಯೋಪಾಲ್ಡ್ ಕ್ರೋನೇಕರ್ ಎಂಬುವನು ದೈವದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ ಎಂದು ಕರೆದಿದ್ದಾನೆ.

ಟೀಕೆ : 2.3 ವಾಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ $q \neq o$ ಎಂಬ ನಿರ್ಬಂಧವು ಬಹು ಮುಖ್ಯವಾದುದು. ಇದು ಶೂನ್ಯದಿಂದ ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನೂ ಭಾಗಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲವೆಂಬುದನ್ನು ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುತ್ತದೆ. ಎಲ್ಲಾ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಗಣವನ್ನು ಇನ್ನು ಮುಂದೆ ಮತ್ತು ಪುಸ್ತಕದುದ್ದಕ್ಕೂ F ಎಂಬ ಅಕ್ಷರದಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ,

$$F = \left\{ \frac{p}{q} \middle| q \neq o \text{ ಮತ್ತು } p,q \in I \right\}$$

ಎಂಬುದನ್ನು ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡೋಣ.

2.4 ದಶಮಾಂಶ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯ ನಿರೂಪಣೆ :

ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ದಶಮಾಂಶ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬೇಕಾದರೆ, ಅದರ ಅಂಶವನ್ನು ಛೇದದಿಂದ ಭಾಗಿಸಬೇಕೆಂಬುದು ತಿಳಿದಿರುವ ವಿಷಯವಾಗಿದೆ. ಕೆಲವು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ದಶಮಾಂಶ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯೋಣ.

(i) $\frac{3}{4} = 0.75$ (2.4.1)

(ii) $\frac{2}{3} = 0.666\ .\ .\ .$ (2.4.2)

(iii) $\frac{6}{7} = 0.\dot{8}57142,\dot{8}57142,85\ .\ .\ .$ (2.4.3)

(i) ರಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆ $\frac{3}{4}$ ರ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆ 0.75 ಆಗಿದೆ. ಇದರಲ್ಲಿ ದಶಮಾಂಶ ಬಿಂದುವಿನ ನಂತರ ಎರಡು ಅಂಕೆಗಳಿವೆ. ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ದಶಮಾಂಶ ಬಿಂದುವಿನ ನಂತರ ಬರುವ ಅಂಕೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಪರಿಮಿತವಾದರೆ, ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು **ಪರಿಮಿತ ದಶಮಾಂಶ**ವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $\frac{3}{4}$ ಸಂಖ್ಯೆಯು **ಒಂದು ಪರಿಮಿತ ದಶಮಾಂಶ** ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ.

(ii) ರಲ್ಲಿರುವ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯಲ್ಲಿ ಅಂಕೆ 6, ಅನಂತ ಪದಗಳ ವರೆಗೆ ಆವರ್ತಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ವಿಷಯವನ್ನು ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ $\frac{2}{3} = 0.\overline{6}$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

(iii) ದಲ್ಲಿರುವ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯಲ್ಲಿ 857142 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ದಶಮಾಂಶ ಬಿಂದುವಿನ ನಂತರ ಇದೇ ಅನುಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಕೊನೆಯಿಲ್ಲದೆ ಆವರ್ತಿಸುತ್ತವೆ. ಈ ವಿಷಯವನ್ನು $\frac{6}{7} = 0.\overline{857142}$ ಎಂದು ಬರೆದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇಂತಹ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು **ಆವರ್ತಕ ದಶಮಾಂಶ**ವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $0.\overline{241} = 0.241241\ldots$ ಎನ್ನುವುದು ಒಂದು ಆವರ್ತಕ ದಶಮಾಂಶವಾಗುತ್ತದೆ.

2.5 ಟೀಕೆ : ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪರಿಮಿತ ದಶಮಾಂಶವಾಗಿಯಾಗಲೀ ಅಥವಾ ಆವರ್ತಕ ದಶಮಾಂಶವಾಗಿಯಾಗಲೀ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದೆಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ.

2.6 **ಟೀಕೆ** : ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು, ಅಗತ್ಯ ಬಿದ್ದರೆ 9 ಎಂಬ ಅಂಕೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ, ಅನಂತ ದಶಮಾಂಶವಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ 2.7 ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

$x = 2{\cdot}69999\ \ldots$ ಎಂದಿರಲಿ

ಇದರ ಎರಡೂ ಬದಿಯನ್ನು 10 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ :

$$\left.\begin{array}{r} 10x = 26{\cdot}9999\ldots \\ x = \ 2{\cdot}6999\ldots \end{array}\right\} \text{ಕಳೆಯಿರಿ}$$

$$9x = 24{\cdot}3000\ldots$$

$$\therefore\ x = \frac{24{\cdot}3000\ldots}{9} = 2{\cdot}7$$

ಆದ್ದರಿಂದ $2.7 = 2.699\ldots = 2.6\overline{9}$.

2.7 ಇದುವರೆಗೆ ಆವರ್ತಕ ದಶಮಾಂಶಗಳನ್ನು ಕುರಿತು ಚರ್ಚಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಇನ್ನು ಮುಂದೆ ಆವರ್ತಿಸದ ಅನಂತ ದಶಮಾಂಶಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಕುರಿತು ವಿಚಾರ ಮಾಡೋಣ. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸೋಣ.

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= 1{\cdot}4142136\ldots \\ \sqrt{3} &= 1{\cdot}73205080\ldots \\ \pi &= 3{\cdot}14159265358\ldots \\ \alpha &= 0{\cdot}01001000100001\ldots \end{aligned}$$

ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯೂ, **ಆವರ್ತಿಸದ ಅನಂತ ದಶಮಾಂಶ**ವಾಗಿದೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ ಒಂದು ಪರಿಮಿತ ಅಥವಾ ಆವರ್ತಕ ದಶಮಾಂಶವನ್ನು ಗುರುತಿಸುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ಆಗಲೇ ಕಂಡಿದ್ದೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವೊಂದೂ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗುವದು ಅಶಕ್ಯ.

ಇಂತಹ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಇನ್ನು ಮುಂದೆ **ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ**ಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಸದ್ಯದಲ್ಲಿ $\sqrt{2}$ ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆಯೆಂದು ಸಾಧಿಸುತ್ತೇವೆ.

2.8 **ವ್ಯಾಖ್ಯೆ** : ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು $p, q \in I$, $q \neq 0$ ಇರುವಂತೆ p/q ರೂಪದಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಲಾಗದಿದ್ದರೆ, ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯ್ನು **ಅಭಾಗಲಬ್ಧ** ಸಂಖ್ಯೆಯೆಂದುಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇಂಥಹ ಎಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಗಣವನ್ನು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ-ವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

2.9 **ವ್ಯಾಖ್ಯೆ** : ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣ I ದಲ್ಲಿರುವ 2 ಮತ್ತು ಅದರ ಎಲ್ಲಾ ಅಪವರ್ತ್ಯಗಳನ್ನು **ಸಮಸಂಖ್ಯೆ**ಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಉಳಿದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. 0 ವನ್ನು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯೆಂದು ಒಪ್ಪಿಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾ : 0, 2, 4, 6, . . . ಇವು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳು.
1, 3, 5, 7, . . . ಇವು ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

ಟೀಕೆ : ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು $p \in I$ ಇರುವಂತೆ $2p$ ಯಿಂದಲೂ ಮತ್ತು ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು $2p+1$ ಎಂಬುದರಿಂದಲೂ ಸೂಚಿಸಬಹು ದೆಂಬುದನ್ನೂ ಗಮನಿಸೋಣ. (ಅ– 2.1.7 ನೋಡಿರಿ).

2.10 ಪ್ರಮೇಯ : ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ವರ್ಗವು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆ ಸಹ ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯಾಗುತ್ತದೆ.

ಸಾಧನೆ : ಬೇಕಾದ ಸಂಖ್ಯೆ x ಆಗಿರಲಿ, ಮತ್ತು x^2 ಒಂದು ಸಮಸಂಖ್ಯೆ ಅಂಬೋಣ. ಈಗ ಎರಡು ಸಾಧ್ಯತೆಗಳುಂಟು. $x =$ ಸಮಸಂಖ್ಯೆ ಅಥವಾ $x =$ ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆ. x ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ, ಸಾಧನೆಯ ಅಗತ್ಯವಿಲ್ಲ. x ಒಂದು ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರಲಿ. ಅಂದರೆ $x = 2p+1$. $p \in I$ ಎಂದು ಬರೆಯ ಬಹುದು, (ಮೇಲಿನ ಟೀಕೆ ನೋಡಿರಿ).

$$\therefore\ x^2 = (2p+1)^2 = 4p^2 + 4p + 1$$
$$= 2(2p^2 + 2p) + 1$$
$$= 2r + 1, \text{ ಇಲ್ಲಿ } r = 2p^2 + 2p \in I$$

(ಏಕೆ ?)

ಅಂದರೆ $x^2 = 2r + 1$.

ಇಲ್ಲಿ ಎಡಬದಿ $x^2 =$ ಸಮಸಂಖ್ಯೆ; ಬಲಬದಿ $2r+1 =$ ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆ.
ಇದು ಅಶಕ್ಯ. ಆದ್ದರಿಂದ **x** ಒಂದು ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆಯೆನ್ನುವುದು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. **ಅಂದರೆ** **x** ಒಂದು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರಲೇಬೇಕು.

2.11 ಪ್ರಮೇಯ: $\sqrt{2}$ ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ.

ಸಾಧನೆ : $\sqrt{2}$ ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲವೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಅಂದರೆ $\sqrt{2}$ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ ಇಲ್ಲಿ $p, q \in I$, ಮತ್ತು $q \neq 0$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಅಲ್ಲದೆ, p, q ಗಳು 1 ರ ವಿನಃ ಬೇರೆ ಯಾವ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವನ್ನು ಪಡೆದಿಲ್ಲವೆಂದು ಭಾವಿಸಬಹುದು, (ಅ – 2.1.8 ನೋಡಿರಿ). ಈಗ,

$$(\sqrt{2})^2 = \frac{p^2}{q^2}$$

ಅಥವಾ $2q^2 = p^2$. ಅಂದರೆ p^2 ಒಂದು ಸಮಸಂಖ್ಯೆ, ಆದ್ದರಿಂದ $p =$ ಸಮಸಂಖ್ಯೆ. ಇದರಿಂದ $p = 2r$, $r \in I$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಅಥವಾ $2q^2 = (2r)^2 = 4r^2$

ಅಥವಾ $q^2 = 2r^2$. ಅಂದರೆ $q =$ ಸಮಸಂಖ್ಯೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ $q = 2t$, $t \in I$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಈಗ $p = 2r$ ಮತ್ತು $q = 2t$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಇದು p ಮತ್ತು q ಗಳು 1 ರ ವಿನಃ ಬೇರೆ ಯಾವ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವನ್ನೂ ಹೊಂದಿಲ್ಲವೆಂಬ ನಿಜಾಂಶವನ್ನು ವಿರೋಧಿಸುತ್ತದೆ. ಇದರಿಂದ $\sqrt{2}$ ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲವೆಂಬ ನಮ್ಮ ಭಾವನೆ ಸರಿಯಲ್ಲವೆಂದಾಯ್ತು. ಅಂದರೆ $\sqrt{2}$ ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಿದಂತಾಯ್ತು.

ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯೆ ಅಥವಾ ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಅದರ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸುವುದರಿಂದ ನಿರ್ಧರಿಸಬಹುದು. ಅದಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯು **ಪರಿಮಿತ ದಶಮಾಂಶ** ಅಥವಾ **ಆವರ್ತಕ ದಶಮಾಂಶ**ವಾದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿಯೂ ಮತ್ತು ಉಳಿದ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ **ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ**ಯಾಗಿಯೂ ಇರುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡೋಣ.

2.12 **ವ್ಯಾಖ್ಯೆ :** ಅನಂತ ದಶಮಾಂಶ ರೂಪದಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಲ್ಲ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

2.13 **ಟೀಕೆ: ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣವನ್ನು R ಎಂಬ ಸಂಕೇತದಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಈ ಸಂಕೇತವನ್ನು ಈ ಅಧ್ಯಾಯುದುದ್ದಕ್ಕೂ ಪಾಲಿಸುತ್ತೇವೆ.**

ಅಭ್ಯಾಸ 2.1

1. ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಆರು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಕೊಡಿರಿ.

2. ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಆರು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಕೊಡಿರಿ.

3. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೇ ಅಥವಾ ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೇ ನಿರ್ಧರಿಸಿರಿ.

   (i) 1.666 . . . (ii) 2·3232 . . .

   (iii) 1·6752136752136 . . .

   (iv) 1·3013001300013000001 . . .

   (v) $\sqrt{7}$. (vi) $\sqrt[3]{11}$.

4. $\sqrt{3}$ ಎಂಬುದು ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

5. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು $p, q \in I$ ಆದಾಗ, p/q ರೂಪದಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿರಿ.

(i) $0.\overline{2}$ (ii) [illegible] $\overline{237}$. (iii) $0.\overline{7}$ (iv) 6·587
   (v) $4.\overline{9171}$

6. ಇವುಗಳನ್ನು ದಶಮಾಂಶ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

   (i) 1/7. (ii) 2/11. (iii) 1/32 (iv) $4\frac{1}{13}$ (v) 4/9.
   (vi) 2/19.

7. 2.9 ವ್ಯಾಖ್ಯೆ ನಂತರದ ಟೀಕೆಯನ್ನು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

8. 2·11 ಪ್ರಮೇಯದಲ್ಲಿ p, q ಗಳು 1ರ ವಿನಃ ಬೇರೆ ಯಾವ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವನ್ನು ಹೊಂದಿಲ್ಲವೆಂದು ಭಾವಿಸಲಾಗಿದೆ. ಈ ಭಾವನೆಯಿಂದ ಸಾಧನೆಯ ಬಿಕ್ಕಟ್ಟಿಗೆ ಕುಂದಾಗಿಲ್ಲವೆಂಬುದನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಿರಿ.

9. $N \subset I \subset F \subset R$ ಎಂಬುದನ್ನು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

2.14 ಆಚರಣೆ: ಅಂಕಗಣಿತದಲ್ಲಿ ನಾವೆಲ್ಲರೂ $+$, $-$, $\times$ ಮತ್ತು $\div$ ಎಂಬ ಚಿಹ್ನೆಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವುದು ಸರಿಯಷ್ಟೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ $3+4=7$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ. ಇಲ್ಲಿ ಬರುವ '$+$' ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು **ಸಂಕಲನ**ವೆಂಬ **ಆಚರಣೆ**ಯ ಸಂಕೇತವಾಗಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಈ ಆಚರಣೆಯನ್ನು (ಅಂದರೆ '$+$' ಅನ್ನು) ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ **ಮೇಲೆ ಆಚರಿಸ**ಬಹುದು (ಮಾಡಬಹುದು) ಎಂಬ ವಿಷಯವು ನಮ್ಮೆಲ್ಲರಿಗೂ ಗೊತ್ತಿದೆ. ಇದೇ ರೀತಿ $-$, $\times$, $\div$ ಎಂಬ ಚಿಹ್ನೆಗಳು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೇಲೆ ವ್ಯವಕಲನ, ಗುಣಾಕಾರ ಮತ್ತು ಭಾಗಾಕಾರ ಎಂಬ **ಸಾಮಾನ್ಯ ಆಚರಣೆ**ಗಳನ್ನು ನಿರ್ದರಿಸುತ್ತವೆಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ.

2.15 ವ್ಯಾಖ್ಯೆ: ಆವೃತಿ : S ಎಂಬ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಗಣದ ಗಣಾಂಶಗಳ ಮೇಲೆ '$+$' ಎಂದು ಸೂಚಿಸುವ † **ಸಂಕಲನ**ವೆಂಬ ಆಚರಣೆಯನ್ನು ನಿರ್ವಹಿಸಬಹುದೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. $a \in S$, $b \in S$ ಆದಾಗ a ಮತ್ತು b ಗಳ ಮೇಲೆ ಈ ಆಚರಣೆಯನ್ನು ಮಾಡಿದಾಗ ದೊರಕುವ **ಲಬ್ಧ**ವನ್ನು $a+b$ ಎಂಬ ಸಂಕೇತದಿಂದ ಸೂಚಿಸೋಣ. ಹೀಗೆ ಪಡೆದ $a+b$ ಲಬ್ಧ S ಗಣದ ಗಣಾಂಶವಾದರೆ, ಆಗ S ಗಣವು ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ **ಸಂಕಲನ**ವೆಂಬ ಆಚರಣೆಯಲ್ಲಿ **ಆವೃತ**ವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ **ಎಲ್ಲಾ** a, $b \in S$ ಗಳಿಗೂ $a+b \in S$ **ಆದರೆ,** S ಗಣವು **ಸಂಕಲನದಲ್ಲಿ ಆವೃತಿವಾಗಿದೆ**ಯೆಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾ : $I_+ = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ (ಇಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಇನ್ನು ಮುಂದೆ ಪುಸ್ತಕ ದುದ್ದಕ್ಕೂ, ಶೂನ್ಯವೂ ಸೇರಿದಂತೆ ಎಲ್ಲಾ ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗಣವನ್ನು I_+ ಎಂಬ ಸಂಕೇತದಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ) ಗಣವು ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ಗುಣಾ ಕಾರಗಳಲ್ಲಿ ಆವೃತವಾಗಿದೆಯೆಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ. ಆದರೆ ಇದು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯವಕಲನದಲ್ಲಿ ಆವೃತವಾಗಿಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ: $1 \in I_+$, $3 \in I_+$ ಆದಾಗ್ಯೂ

$$1-3 = -2 \notin I_+$$ (ಅ–2.2–1 ನೋಡಿರಿ)

2.16 ವ್ಯಾಖ್ಯೆ : ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಶಾಖೆಯ ಬೆಳವಣಿಗೆಯು ಪ್ರಾರಂಭದಲ್ಲಿ ಹಲವು ತತ್ವಗಳ ನಿರೂಪಣೆಯಿಂದ ಶುರುವಾಗುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆ

---

† ಇಲ್ಲಿ ಹೇಳಿರುವ, ಸಂಕಲನವು N ಗಣದಲ್ಲಿ ನಿರ್ವಹಿಸುವ **ಸಾಮಾನ್ಯ ಸಂಕಲನ** ಒಂದೇ ಇರಬೇಕೆಂಬ ನಿರ್ಬಂಧವೇನಿಲ್ಲ.

ಅಂಗೀಕರಿಸಿದ ತತ್ವಗಳನ್ನು **ಮೂಲತತ್ವ**ಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ಮೂಲ ತತ್ವಗಳನ್ನು ಆಧಾರವಾಗಿಟ್ಟುಕೊಂಡು, ಸಮಂಜಸವಾದಸರಣಿಯಿಂದ ಮುಂದೆ ಪಡೆಯಬಹುದಾದ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು **ಪ್ರಮೇಯ** ವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಹೀಗೆ ಒಪ್ಪಿಕೊಂಡ ಮೂಲತತ್ವಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ನಂತರ ಸಾಧಿಸಿದ ಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದ ಶಾಖೆಯ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು ಮಾಡುತ್ತೇವೆ. ಈಗ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಮೂಲತತ್ವಗಳನ್ನು ನಿರೂಪಿಸುತ್ತೇವೆ :

2·17 ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೂಲತತ್ವಗಳು :

(1) **ಆವೃತಿ ನಿಯಮ** : $a, b \in R$ ಎನ್ನೋಣ. ಆಗ $a+b \in R$ ಮತ್ತು $ab \in R$.

(2) **ಪರಿವರ್ತನೀಯ ನಿಯಮ** : $ab \in R$ ಎನ್ನೋಣ. ಆಗ $a+b = b+a$ ಮತ್ತು $ab = ba$.

(3) **ಸಹವರ್ತನೀಯ ನಿಯಮ** : $a, b, c \in R$ ಎನ್ನೋಣ. ಆಗ $(a+b)+c = a+(b+c)$ ಮತ್ತು $(ab)c = a(bc)$.

(4) (a) **ಸಂಕಲನದ ಏಕ** : Rಗಣದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗಣಾಂಶ aಗೂ $a+0 = 0+a = a$ ಇರುವಂತೆ 0 (ಶೂನ್ಯ ಎಂದು ಓದಿ) ಎಂಬ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ R ಗಣದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿ ಶೂನ್ಯವನ್ನು Rಗಣದ **ಸಂಕಲನದ ಏಕ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

(b) **ಗುಣಾಕಾರದ ಏಕ**: ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗಣಾಂಶ $a \in R$ಗೂ $a \times 1 = 1 \times a = a$ ಇರುವಂತೆ 1 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯು R ಗಣದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿ 1ನ್ನು **ಗುಣಾಕಾರದ ಏಕ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

(5) (a) **ಸಂಕಲನದ ಅನುಲೋಮ** : ಪ್ರತಿಯೊಂದು $a \in R$ಗೂ $a+(-a) = 0$ ಇರುವಂತೆ $-a$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯು R ಗಣದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿ $-a$ ಯನ್ನು a ಯ **ಸಂಕಲನದ ಅನುಲೋಮ**ವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

(b) **ಗುಣಾಕಾರದ ಪ್ರತಿಲೋಮ** : $0 \neq a \in R$ ಎನ್ನೋಣ. ಆಗ $a^{-1}a = aa^{-1} = 1$ ಇರುವಂತೆ a^{-1} ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯು R ಗಣದಲ್ಲಿ ರುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿ a^{-1}ನ್ನು **ಗುಣಾಕಾರದ ಪ್ರತಿಲೋಮ**ವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ವಾಸ್ತವವಾಗಿ $a^{-1} = \frac{1}{a}$ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ.

(c) **ವಿಭಾಜಕ ನಿಯಮ:** a, b, c $\in$ R ಎಂದಿರಲಿ.
ಆಗ $a(b+c)=ab+ac$.

(6) a, b, c, d $\in$ R ಆದಾಗ $a=b$ ಮತ್ತು $c=d$ ಆದರೆ $a+c=b+d$ ಮತ್ತು $ac=bd$.

2.18 ವ್ಯಾಖ್ಯೆ : ವ್ಯವಕಲನ : a, b $\in$ R ಆದಾಗ $a-b$ ಎಂಬುದಕ್ಕೆ $a-b=a+(-b)$ ಎಂಬ ಅರ್ಥವನ್ನು ಕೊಡುತ್ತೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ $-b$ ಯು bಯ **ಸಂಕಲನದ ಅನುಲೋಮ**ವೆಂಬುದನ್ನು ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡೋಣ.

2.19 ವ್ಯಾಖ್ಯೆ : ಭಾಗಾಕಾರ : a, b $\in$ R ಮತ್ತು $b \neq 0$ ಆದಾಗ, '$a \div b$' ಎಂಬುದಕ್ಕೆ $(a \div b)=ab^{-1}$ ಎಂಬ ಅರ್ಥವನ್ನು ಕೊಡುತ್ತೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ b^{-1} bಯ ಗುಣಾಕಾರದ ಪ್ರತಿಲೋಮ.

2.20 ಟೀಕೆ : ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಯುಕ್ತಗೊಳಿಸುವ ಕೆಲವು ಮೂಲಗುಣಗಳನ್ನು ಮುಂದೆ ಕೊಟ್ಟಿದ್ದೇವೆ. ಅವೇದರೆ, $-1 \times +1=-1; -1 \times -1=+1$ ಇತ್ಯಾದಿ. ಈ ವಿಷಯವನ್ನು ಪ್ರೌಢಶಾಲೆಯ ಮಟ್ಟದಲ್ಲೇ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಕಲಿತಿರುತ್ತಾರೆ. ಅಂಥ ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯನ್ನು, "ಯಾವ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ಈ ಮೂಲಗುಣಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೀಯೆ?" ಎಂದು ಕೇಳಿದರೆ, ಅವನಿಂದ ನಿರೀಕ್ಷಿಸಬಹುದಾದ ಉತ್ತರ: "ನಮ್ಮ ಉಪಾಧ್ಯಾಯರು ಹಾಗೆ ಹೇಳಿಕೊಟ್ಟಿದ್ದಾರೆ, ಆದರಿಂದ ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇನೆ" ಎಂಬುದಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಮೇಯಗಳು ಮೇಲಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಸಮಂಜಸವಾಗಿ ಉತ್ತರಿಸುವಲ್ಲಿ ಸಹಕಾರಿಯಾಗುವವೆಂದು ಆಶಿಸಲಾಗಿದೆ.

2.2 ಪ್ರಮೇಯ : a, b $\in$ R ಮತ್ತು $a+b=c+b$ ಆದಾಗ $a=c$.

ಸಾಧನೆ : **ವಿವರಣೆ**

$a+b=c+b$ (ದತ್ತ)

$\therefore a+b+(-b)=c+b+(-b)$ [2. 17 – (6)]

ಅಥವಾ $a+\{b+(-b)\}=c+\{b+(-b)\}$ [2. 17 – (3)]

$\therefore a+0=c+0$ [2. 17 – (5)(a)]

ಅಥವಾ $a=c$. [2. 17 – (4)(a)]

2.22 ಪ್ರಮೇಯ : $a \in R$ ಎನ್ನೋಣ. ಆಗ $a \times 0 = a$.

ಸಾಧನೆ : $a \times 0 = a \times (0+0)$ [2· 17 – 4(a)]

$\therefore$ $a \times 0 = a \times 0 + a \times 0$ [2· 17 – 5(c)]

ಆದರೆ $a \times 0 + 0 = a \times 0 + a \times 0$ [2· 17 – 4(a)]

$\therefore$ $a \times 0 = 0$ (2·21 ಪ್ರಮೇಯ)

2·23 ಪ್ರಮೇಯ : $a, b \in R$ ಮತ್ತು $a + b = 0$ ಆದಾಗ $a = -b$.

ಸಾಧನೆ : $a + b = 0$ [ದತ್ತ]

$a + b + (-b) = 0 + (-b)$ [ಏಕೆ?]

ಅಥವಾ $a + \{ b + (-b) \} = -b$ [ಏಕೆ?]

ಆದರೆ, $a + 0 = -b$

ಅಥವಾ $a = -b$.

ಅನುಮಿತ : $a \in R$ ಆದಾಗ $a = -(-a)$.

ಸಾಧನೆ : $x = -a$ ಎನ್ನೋಣ.

ಆಗ $x + a = -a + a$

$\therefore$ $x + a = 0$

$\therefore$ x ನ ಸಂಕಲನದ ಅನುಲೋಮ $= a$

ಅಥವಾ $-x = a$

$\therefore$ $-(-a) = a$

2·24 ಪ್ರಮೇಯ : $a, b \in R$ ಎಂದಿರಲಿ. ಆಗ $a(-b) = -a(b) = -ab$

ಸಾಧನೆ $a(-b) = a(-b) + 0$ [ಏಕೆ?]

$a(-b) = a(-b) + \{ab + (-ab)\}$ [ಏಕೆ?]

$= \{a(-b) + ab\} + (-ab)$ [ಏಕೆ?]

$= \{a \times -b + a \times b\} - ab$

$= a(-b + b) - ab$ [2· 17 – (5) (c)]

$= a(0) - ab$

$= 0 - ab$

$= -ab$

ಇದೇ ರೀತಿ $-a(b) = -ab$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

ಅನುಮಿತಿ : $(-1)(1) = (1)(-1) = -1$

2·25 ಪ್ರಮೇಯ : $(-a)(-b) = ab$

ಸಾಧನೆ : $\mathbf{x} = -b$ ಎಂದಿರಲಿ

ಎಡಬದಿ $= (-a)(\mathbf{x})$

$= (-a)\,\mathbf{x}$

$= a(-\mathbf{x})$ [2·24 ಪ್ರಮೇಯ]

$= a\{-(-b)\}$

$= a(b)$ [ಏಕೆ ?]

2·26 ಟೀಕೆ : ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಬರುವ ಅನೇಕ ಪ್ರಮೇಯಗಳ ನಿರೂಪಣೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರಚಂಡವಾದ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತತೆ ಮತ್ತು ಬಿಕ್ಕಟ್ಟು **'ಆದರೆ ಮತ್ತು ಆದಾಗ ಮಾತ್ರ'** ಎಂಬ ವಾಕ್ಸರಣಿಯ ಉಪಯೋಗದಿಂದ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಈ ವಾಕ್ಸರಣಿಯನ್ನು ಇನ್ನು ಮುಂದೆ ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ **'ಆ ಆ ಮಾತ್ರ'** ಎಂದು ಬರೆದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇದರ ವಿವರಣೆಯನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿದ್ದೇವೆ.

2·27 ಉದಾ : (i) **a** ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯಾದಾಗ $\mathbf{a}^2$ ಸಹ ಒಂದು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ವಿಲೋಮವಾಗಿ, $\mathbf{a}^2$ ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ, **a**ಸಹ ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರಲೇಬೇಕು.

ಈ ವಿಷಯವನ್ನು ಮೇಲೆಹೇಳಿದ **'ಆದರೆ ಮತ್ತು ಆದಾಗ ಮಾತ್ರ'** ವಾಕ್ಸರಣಿಯನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಮುಂದೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವಂತೆ ನಿರೂಪಿಸುತ್ತೇವೆ :

a ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ ಮತ್ತು ಆದಾಗ ಮಾತ್ರ $\mathbf{a}^2$ ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯಾಗುತ್ತದೆ.

(ii) ಯಾವುದೇ ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜವು, ಪಾದಕೋನಗಳು ಸಮನಾದರೆ ಮತ್ತು **ಆದಾಗ ಮಾತ್ರ** †ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜವಾಗುತ್ತದೆ.

ಇದರ ಅರ್ಥ : ಯಾವುದೇ ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಪಾದಕೋನಗಳು ಸಮನಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ, ಆ ತ್ರಿಭುಜವು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜವಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ವಿಲೋಮವಾಗಿ, ಯಾವುದೇ ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜವು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜವಾದರೆ, ಆ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಪಾದಕೋನಗಳು ಸಮನಾಗುತ್ತವೆ.

---

† ಪಾದವನ್ನು ಬಿಟ್ಟು ಉಳಿದ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳು ಸಮ ಎಂದು ಭಾವಿಸಲಾಗಿದೆ.

2·28 ಪ್ರಮೇಯ : $a, b, c \in R$ ಆದಾಗ, $a(b-c)=ab-ac$

ಸಾಧನೆ : ಎಡಬದಿ $= a\{b+(-c)\}$ [2·18 ವ್ಯಾಖ್ಯೆ]

$= ab+a(-c)$ [ಏಕೆ ?]

$= ab-ac$ [ಏಕೆ ?]

2·29 ಪ್ರಮೇಯ : $a, b \in R$ ಎನ್ನೋಣ. ಆಗ $ab=0$ ಆದರೆ, ಮತ್ತು ಆದಾಗ ಮಾತ್ರ $a=0$ ಅಥವಾ $b=0$

ಸಾಧನೆ : ಆದರೆ ಭಾಗ : $ab=0$ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿ, $a=0$ ಅಥವಾ $b=0$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸುತ್ತೇವೆ.

$ab=0$ ಮತ್ತು $a \neq 0$ ಎನ್ನೋಣ.

ಆದ್ದರಿಂದ aಯ ಗುಣಾಕಾರದ ಪ್ರತಿಲೋಮ a^{-1} R ಗಣದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ.

ಈಗ $a^{-1}(ab)=a^{-1}(0)$ [ಏಕೆ ?]

ಅಥವಾ $(a^{-1}a)b=0$ [ಏಕೆ ?]

ಅಂದರೆ, $1b=0$ ಅಥವಾ $b=0$.

ಇದೇ ರೀತಿ $b \neq 0$ ಆದಾಗ $a=0$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

ಆದಾಗ ಮಾತ್ರ ಭಾಗ : $a=0$ ಅಥವಾ $b=0$ ಆದಾಗ $ab=0$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬೇಕು. ಇದನ್ನು 2·22 ಪ್ರಮೇಯದಲ್ಲಿ ಆಗಲೇ ಸಾಧಿಸಿದ್ದೇವೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 2·2

1. ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ವ್ಯವಕಲನದಲ್ಲಿ ಆವೃತವಾಗದಿರುವ R ಗಣದ ನಾಲ್ಕು ಉಪ ಗಣಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ. I_+ ಗಣವು ಭಾಗಾಕಾರದಲ್ಲಿ ಆವೃತವಾಗಿಲ್ಲವೆಂಬುದನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಿರಿ.

2. $X = \{x|x=$ ಸಮಸಂಖ್ಯೆ$\}$, ಈ ಗಣವು ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ಗುಣಾಕಾರಗಳಲ್ಲಿ ಆವೃತವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ. ಭಾಗಾಕಾರದಲ್ಲಿ ಇದು ಆವೃತವಾಗಿದೆಯೇ ? ನಿರ್ಧರಿಸಿರಿ.

3. $X=\{x|x=2n+1, n\in I\}$ ಎಂಬ ಗಣವು ಸಂಕಲನದಲ್ಲಿ ಆವೃತವಾಗಿಲ್ಲ ವೆಂದೂ ಹಾಗೂ ಗುಣಾಕಾರದಲ್ಲಿ ಆವೃತವಾಗಿದೆ ಎಂದೂ ತೋರಿಸಿರಿ.

4. $X=\{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ ಎಂಬ ಗಣವು ಕೆಳಗೆ ವಿವರಿಸಿರುವ '+'

ಎಂಬ ಆಚರಣೆಯಲ್ಲಿ ಆವೃತವಾಗಿದೆಯೇ? ನಿರ್ಧರಿಸಿರಿ,

$+$ನ ವಿವರಣೆ : $a_i + a_j = a_{i+j} \quad (i+j \leq 6)$

$= a_{i+j-6} \quad (i+j > 6)$

ಮತ್ತು $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6; j = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$

5. F ಎಂಬುದು ಎಲ್ಲ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ ಎನ್ನೋಣ. $p \in F$, $q \in F$ ಆದಾಗ $p+q \in F$ ಮತ್ತು $pq \in F$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ [ಸೂಚನೆ : ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿರಿ].

6. ಶೂನ್ಯಗಣವು ಎಲ್ಲ ಆಚರಣೆಗಳಲ್ಲೂ ಆವೃತವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

7. ಮೂಲತತ್ವಗಳು ಹಾಗೂ ಅನಂತರ ಸಾಧಿಸಿದ ಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಕೆಳಗಿನ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿರಿ. $a, b, c \in R$ ಆಗಿರಲಿ, ಆಗ :

(i) $b + (a - b) = a$

(ii) $(b + a) - c = (b - c) + a$

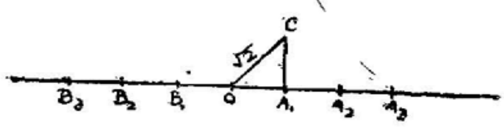
(iii) $b - (-a) = b + a$.

(iv) $-(b + a) = -b - a$

(v) $\frac{1}{a}(ba) = b$. $(a \neq 0)$

---

30 ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆ : ಒಂದು ಅನಂತ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ 0 ಎಂಬ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸೋಣ. ಹೀಗೆ ಗುರುತಿಸಿದ ಬಿಂದುವನ್ನು ಮೂಲಬಿಂದುವೆಂದು ಕರೆಯೋಣ. 0 ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಬಲಬದಿಯಲ್ಲಿ ಮತ್ತೊಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು (A_1) ಈ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಗುರುತಿಸೋಣ (ಚಿತ್ರ 2.30.1 ನೋಡಿರಿ).



ಚಿತ್ರ : 2.30.1

ಮತ್ತೆ $A_2, A_3, A_4, \ldots$ ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು 0 ಯಿಂದ ಬದಿಯಲ್ಲಿ $OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = \cdots = 1$ ಉದ್ದಳತೆಯ ಮಾನವಿರುವಂತೆ ಗುರುತಿಸೋಣ. $OA_1 = OB_1 = OB_2 = \cdots = 1$ ಇರಲಿ.

ಈಗ ಮೂಲಬಿಂದುವಾದ O ಬಿಂದುವು ಶೂನ್ಯವೆಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸಿದರೆ, A_1, B_1, A_2, B_2, . . . , ಈ ಬಿಂದುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 1, −1, 2, −2, . . . ಎಂಬ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ. ನಮ್ಮ ರಚನಾಕ್ರಮದಿಂದ A_q $(q \in N)$ ಬಿಂದುವು q ಎಂಬ ಪೂರ್ಣಾಂಕವನ್ನು ಗುರ್ತಿಸುತ್ತದೆಂಬುದು ಸುಲಭವಾಗಿ ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ.

ಈಗ OA_qವನ್ನು q ಸಮಭಾಗಗಳಾಗಿ a_1, a_2, . . . a_{q-1} ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಿದರೆ, a_p $(p<q)$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವು p/q ಎಂಬ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ [ಏಕೆ?]. ಇದೇ ರೀತಿ O ಬಿಂದುವಿನ ಎಡಬದಿಯಲ್ಲಿರುವ B_p $(OB_p = OA_p)$ ಬಿಂದುವು $\frac{-p}{q}$ ಎಂಬ ಋಣ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನೂ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಅನಂತ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಸೂಚಿಸಬಹುದೆಂಬುದು ಗೊತ್ತಾಯಿತು. ಸಹಜವಾಗಿ ಏಳುವ ಪ್ರಶ್ನೆ : ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಸೂಚಿಸುವ ಬಿಂದುವೊಂದು ಇದೆಯೆ ? ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $\sqrt{2}$ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. ಈಗ $A_1C = OA_1$ ಇರುವಂತೆ A_1Cಯನ್ನು OA_1ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯೋಣ. ಆಗ OA_1C ಒಂದು ಸಮಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ ಮತ್ತು $OA_1 = A_1C = 1$ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ. ಮತ್ತು,

$$(OA_1)^2 + (A_1C)^2 = (OC)^2$$

ಅಂದರೆ, $$1^2 + 1^2 = (OC)^2$$

$\therefore$ $$2 = OC^2$$

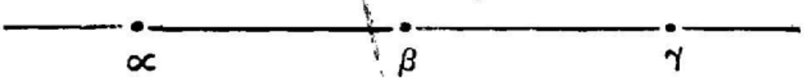
ಅಥವಾ $$\pm\sqrt{2} = OC$$

ಇದರಿಂದ O ಬಿಂದುವಿನ ಬಲಬದಿಯಲ್ಲಿ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ D ಬಿಂದುವನ್ನು $OD = OC$ ಇರುವಂತೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಅದು $\sqrt{2}$ ಎಂಬ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಇದೇ ರೀತಿ, ಯಾವ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನೇ ಆಗಲಿ ಅನಂತ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಸೂಚಿಸಬಹುದೆಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸಬಹುದು

ಪ್ರಸ್ತುತವಾಗಿ ದತ್ತ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬಿಂದುವು ಒಂದು ಗೊತ್ತಾದ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆಯೇ ಎಂಬ ಪ್ರಶ್ನೆ ಏಳುತ್ತದೆ. ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಗೆ ರಿಚರ್ಡ್ ಡೆಡಿಕಿಂಡ್ (Richard Dedikind – 1872)

ಎಂಬ ಜರ್ಮನ್ ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞನು ಉತ್ತರ ಕೊಟ್ಟಿದ್ದಾನೆ. ಅದನ್ನು ಡೆಡಿಕಿಂಡನ **'ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆಯ ಪ್ರಮೇಯ'** (Dedikind's Theorem of Continuity) ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಈ ಪ್ರಮೇಯವು 'ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲಿರುವ (ಅಂದರೆ ಚಿತ್ರ 2.30.1 ರಲ್ಲಿ ರಚಿಸಿದ ಸರಳರೇಖೆ) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದುವೂ ಎಲ್ಲ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲೂ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ' ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ ಎಲ್ಲ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಒಂದು ಅನಂತ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ರೂಪಿಸಬಹುದು ಹಾಗೂ ವಿಲೋಮವಾಗಿ ಈ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದುವೂ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡೋಣ. ಆದ್ದರಿಂದ ಇನ್ನು ಮುಂದೆ **ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ** ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಬಹುದೆಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ.

2.31 ಟೀಕೆ : α, β ಮತ್ತು γ ಗಳು ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದೇ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ (ಚಿತ್ರ 2.31.1 ನೋಡಿರಿ).



ಚಿತ್ರ : 2.31.1

ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ರಚನೆಯಿಂದ ತಿಳಿದುಬರುವ ಸಂಗತಿ : **α β ಗಿಂತ ಚಿಕ್ಕ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು γ β ಗಿಂತ ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆ.** ಇದನ್ನು ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ *$\alpha < \beta$ (α β ಗಿಂತ ಚಿಕ್ಕದು ಎಂದು ಓದಿರಿ). ಮತ್ತು $\gamma > \beta$ (γ β ಗಿಂತ ದೊಡ್ಡದು ಎಂದು ಓದಿರಿ) ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದರಿಂದ ತಿಳಿಯುವ ವಿಷಯ :

2.32 ಟೀಕೆ : ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯು(ಬಿಂದುವು) K ಆದರೆ, ಆಗ ಈ ಬಿಂದುವಿನ ಎಡಬದಿಯಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯೂ K ಗಿಂತ ಚಿಕ್ಕದಾಗಿಯೂ ಮತ್ತು ಈ ಬಿಂದುವಿನ ಬಲಬದಿಯಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯೂ K ಗಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾಗಿಯೂ ಇರುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ.

2·33 ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣದಲ್ಲಿನ ಅನುಕ್ರಮ ಮೂಲತತ್ವಗಳು:

---

* $\alpha < \gamma$ ಮತ್ತು $\gamma > \beta$ ಎಂಬ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು **ಅಸಮತ್ವವೆಂದು** ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

1) ತ್ರಿಚ್ಛೇದ ನಿಯಮ : $a, b \in R$ ಆದರೆ $a<b$, $a=b$, $a>b$ ಎಂಬ ಮೂರು ಸಂಬಂಧಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಒಂದು ಮಾತ್ರ ಯುಕ್ತವಾಗುತ್ತದೆ.

2) ವಾಹಕ ನಿಯಮ : $a<c$ ಮತ್ತು $c<b$ ಆದಾಗ, $a<b$ ಯುಕ್ತವಾಗುತ್ತದೆ.

3) ಗುಣಾಕಾರ ನಿಯಮ : $a, b \in R$ ಮತ್ತು $a>0, b>0$ ಎನ್ನೋಣ. ಆಗ $ab>0$

4) ಸಂಕಲನ ನಿಯಮ : $a, b, c \in R$ ಮತ್ತು $a<b$ ಆದಾಗ, $a+c<b+c$ ಎಂಬ ಅಸಮತ್ವ ಯುಕ್ತವಾಗುತ್ತದೆ.

2.34 ಪ್ರಮೇಯ : $a, b \in R$ ಎನ್ನೋಣ. ಆಗ $a>b$ ಆದರೆ ಮತ್ತು ಆದಾಗ ಮಾತ್ರ $a-b>0$

ಸಾಧನೆ : ಆದರೆ ಭಾಗ : $a>b$ ಎನ್ನೋಣ.

$\therefore \quad a+(-b)>b+(-b)$ [2. 33 – (4)]

ಅಥವಾ $a-b>0$

ಆದಾಗ ಮಾತ್ರ ಭಾಗ : $a-b>0$ ಎನ್ನೋಣ. $a>b$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬೇಕು.

$a-b>0$ [ದತ್ತ]

$\therefore \quad a-b+b>0+b$ [2.33 – (4)]

$a+0>b$

ಅಂದರೆ, $a>b$

2.35 ಪ್ರಮೇಯ : $a, b <R$ ಎನ್ನೋಣ. $a<b$ ಆದರೆ ಮತ್ತು ಆದಾಗ ಮಾತ್ರ $a-b<0$

ಸಾಧನೆ ಆದರೆ ಭಾಗ : $a<b$ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿ $a-b<0$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬೇಕು.

$a<b$ [ದತ್ತ]

$\therefore \quad a+(-b)<b+(-b)$ [2.33 – (4)]

ಅಂದರೆ, $a-b<0$ [ಏಕೆ ?]

ಇದೇ ರೀತಿ ಆದರೆ ಮಾತ್ರ ಭಾಗವನ್ನು ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

2·36 ಪ್ರಮೇಯ : $a, b, c \in R$ ಎನ್ನೋಣ. ಆಗ $a < b$, $c < d$ ಆದರೆ $a+c < b+d$ ಎಂಬ ಅಸಮತ್ವ ಯುಕ್ತವಾಗುತ್ತದೆ.

ಸಾಧನೆ : $a < b$ [ದತ್ತ]

i) $\therefore$ $a+c < b+c$ [2·33—(4)]

ಮತ್ತು $c < d$ [ದತ್ತ]

ii) $\therefore$ $c+b < b+d$ [ಏಕೆ ?]

i) ಮತ್ತು ii) ರಿಂದ : $a+c < b+d$ [2·33—(2)]

2·37 ಪ್ರಮೇಯ : $a, b, c \in R$ ಎನ್ನೋಣ. $a < c$ ಮತ್ತು $b > 0$ ಆದರೆ $ab < bc$ ಎಂಬುದು ಯುಕ್ತವಾಗುತ್ತದೆ.

ಸಾಧನೆ : $a < c$ [ದತ್ತ]

$\therefore$ $c > a$ [ಏಕೆ ?]

$b > 0$ ಇರುವುದರಿಂದ, $bc > ba$ [2·33—(3)]

$\therefore$ $ba < bc$ [ಏಕೆ ?]

ಅಥವಾ $ab < bc$

ಅನುಮಿತ : ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಅಸಮತ್ವ ಸಂಬಂಧವನ್ನು, ಒಂದು ಧನಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ, ಆ ಅಸಮತ್ವ ಸಂಬಂಧದ ಚಿಹ್ನೆಯು ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

2·38 ಪ್ರಮೇಯ : $a \in R$ ಎನ್ನೋಣ, $a > 0$ ಆದರೆ ಮತ್ತು ಆದಾಗ ಮಾತ್ರ $-a < 0$

ಸಾಧನೆ : ಆದರೆ ಭಾಗ : $a > 0$ [ದತ್ತ]

$\therefore$ $a+(-a) > 0+(-a)$ [ಏಕೆ ?]

ಅಂದರೆ, $0 > -a$

$\therefore$ $-a < 0$

ಇದೇರೀತಿ $-a < 0$ ಆದಾಗ ಮಾತ್ರ, $a > 0$ ಎಂದು ತೋರಿಸಬಹುದು.

2·39 ಪ್ರಮೇಯ : $a, b, c \in R$ ಎನ್ನೋಣ, ಈಗ $a > b$ ಮತ್ತು $c < 0$ ಆದರೆ $ac < bc$.

ಸಾಧನೆ :	$c<0$	[ದತ್ತ]
$\therefore$	$-c>0$	[2·38 ಪ್ರಮೇಯ]
$a>b$ ಇರುವುದರಿಂದ,	$a-b>0$	[2·34 ಪ್ರಮೇಯ]
ಅಂದರೆ,	$-c(a-b)>0\times 0$	
ಅಥವಾ	$-ca+cb>0$	
$\therefore$	$-ca+cb+ca>0+ca$	[ಏಕೆ ?]
ಅಥವಾ	$cb>ca$	
$\therefore$	$ac>bc$	

ಅನುಮಿತ : ಒಂದು ಅಸಮತ್ವದ ಎರಡು ಬದಿಯನ್ನು ಒಂದೇ **ಋಣಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿ**ದರೆ ಆ ಅಸಮತ್ವದ ಚಿಹ್ನೆಯು ಬದಲಾಗುತ್ತದೆ.

2·40 ಟೀಕೆ : $a, x, b\in R$ ಮತ್ತು $a<x<b$ ಆದರೆ, x ಸಂಖ್ಯೆಯು a ಮತ್ತು bಗಳ ನಡುವೆ ಇರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ [ಚಿತ್ರ : 2.40.1 ನೋಡಿರಿ].



ಚಿತ್ರ : 2·40·1

2·41 ಉದಾ : ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ a, bಗಳು ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೆ, a ಮತ್ತು bಗಳ ನಡುವೆ ಎಣಿಸಲಾಗದಷ್ಟು (ಅಂದರೆ ಅನಂತ) ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿರುತ್ತವೆ ($a<b$ ಆಗಿದೆ).

ಸಾಧನೆ : $a, b\in F$ ಎಂದರೆ, $\frac{a+b}{2}\in F$. ಅಲ್ಲದೆ $a<\frac{a+b}{2}<b$ ಎಂಬುದು ನಿಜ. ಆದ್ದರಿಂದ ದತ್ತ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಡುವೆ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ $\left(=\frac{a+b}{2}\right)$ ಇದೆಯೆಂದಾಯಿತು. ಇದೇ ರೀತಿ a ಮತ್ತು $\frac{a+b}{2}$ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಡುವೆಯೂ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಇದೆಯೆಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ a, bಗಳ ನಡುವೆ ಅನಂತ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿರುವುದು ವ್ಯಕ್ತವಾಗುತ್ತದೆ (ಏಕೆ ?)

2·42 ವ್ಯಾಖ್ಯೆ : $x \in R$ ಆದಾಗ, x ಗಣಾಂಶದ ನಿರಪೇಕ್ಷ ಮೌಲ್ಯವನ್ನು $|x|$ (ಮಾಡ್ x ಎಂದು ಓದಿರಿ) ಎಂಬ ಸಂಕೇತದಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಅಲ್ಲದೆ $|x|$ ನಿರೂಪಣೆಯನ್ನು :

$$|x| = x \qquad (x > 0)$$

ಮತ್ತು
$$|x| = -x \qquad (x < 0)$$

ಎಂದು ಮಾಡುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾ : (i) $3 > 0 \quad \therefore \quad |3| = 3$

(ii) $-5 < 0 \quad \therefore \quad |-5| = -(-5) = 5$

2·43 ಟೀಕೆ : ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯು (i) ಧನವಾದರೆ, ಅದರ ನಿರಪೇಕ್ಷ ಮೌಲ್ಯವು ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸಮನಾಗಿಯೂ, (ii) ಋಣವಾದರೆ, ಅದರ ನಿರಪೇಕ್ಷ ಮೌಲ್ಯವು ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಸಂಕಲನದ ಅನುಲೋಮಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿಯೂ, ಇರುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡೋಣ.

2·44 ಪ್ರಮೇಯ : $x, 1, \varepsilon \in R$ ಎನ್ನೋಣ. ಆಗ $|x-1| < \varepsilon$ ಆದರೆ, ಮತ್ತು ಆದಾಗ ಮಾತ್ರ $1-\varepsilon < x < 1+\varepsilon$ ಎಂಬ ಅಸಮತ್ವಗಳು ಯುಕ್ತವಾಗುತ್ತವೆ.

ಸಾಧನೆ : ಆದರೆ ಭಾಗ : $|x-1| < \varepsilon$ ಎಂದಿರಲಿ.

i) $0 > x > 1$ ಆದಾಗ, $x-1 > 0$

$\therefore \quad |x-1| = x-1$ [2·42 ವ್ಯಾಖ್ಯೆ]

$\therefore \quad x-1 < \varepsilon$

$\therefore \quad x < 1+\varepsilon$ .... (a)

ii) $0 < x < 1$ ಆದಾಗ, $x-1 < 0$

$\therefore \quad |x-1| = -(x-1) = -x+1$ [ಏಕೆ ?]

$\therefore \quad -x+1 < \varepsilon$

$\therefore \quad 1-\varepsilon < x$ ....(b)

(a) ಮತ್ತು (b) ಗಳಿಂದ : $1-\varepsilon < x < 1+\varepsilon$. ಇದೇ ರೀತಿ ' ಆದಾಗ ಮಾತ್ರ ' ಭಾಗವನ್ನೂ ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

2·45 ಉದಾ : x ನ ಯಾವ ವಾಸ್ತವ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ $|x-3| < 5$ ಎಂಬ ಅಸಮತ್ವವು ಯುಕ್ತವಾಗುತ್ತದೆ ?

$|x-3|<5$, ಆ ಆ ಮಾತ್ರ, $3-5<x<3+5$

ಅಥವಾ $-2<x<8$.

ಅಭ್ಯಾಸ 2·3

1. $a, b \in R$ ಆದಾಗ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ತಾಳೆ ನೋಡಿರಿ.
   - (i) $a>0$, $b>0$ ಆದಾಗ, $|a+b|=|a|+|b|$
   - (ii) $a>0$, $b<0$ ಆದಾಗ, $|a+b|<|a|+|b|$
   - (iii) $|a+b| \leqslant |a|+|b|$
   - (iv) $0>a>b$ ಆದಾಗ, $|a-b|=|a|-|b|$
   - (v) $a>0$, $b<0$ ಆದಾಗ, $|a-b|>|a|-|b|$
   - (vi) $|a-b| \geqslant |a|-|b|$

2. xನ ಯಾವ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ, ಕೆಳಗಿನ ಅಸಮತ್ವಗಳು ಯುಕ್ತವಾಗುತ್ತವೆಂಬುದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (i) $|x+3|<1$ (ii) $|2x+1|<3$ (iii) $|3x-|2<4$

   (iv) $|4x+1|<0{\cdot}1$

2·46 ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು : $a, b \in R$ ಮತ್ತು $a \neq 0$ ಎನ್ನೋಣ. ಆಗ *$ax+b=0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಬಿಡಿಸಬಹುದು. ಏಕೆಂದರೆ :

$$ax+b=0$$

$$\therefore \quad ax+b-b=0-b$$

ಅಥವಾ $$ax=-b$$

$a \neq 0$ ಇರುವುದರಿಂದ, $x=\frac{-b}{a}$

$a, b \in R$ ಇರುವುದರಿಂದ, $x=\frac{-b}{a} \in R$

ಆದ್ದರಿಂದ $x=$ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ.

*$\alpha \in R$ ಸಂಖ್ಯೆಯು R ಗಣದಲ್ಲಿ $a\alpha+b=0$ ಇರುವಂತೆ, aಯು ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

ಈಗ $x^2+4=0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಬಿಡಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವೇ ಎಂಬುದನ್ನು ವಿಚಾರ ಮಾಡೋಣ.

$$x^2+4=0 \qquad \text{[ದತ್ತ]}$$

$\therefore \quad x^2+4-4=0-4$

ಅಥವಾ $\quad x^2=-4$

$\therefore \quad x=\sqrt{-4}=\sqrt{-1\times 4}=\sqrt{-1}\times\sqrt{4}$

ಅಥವಾ $\quad x=\sqrt{-1}\times 2$ ಆದರೆ, $\sqrt{-1}\times 2\notin R$.

ಆದ್ದರಿಂದ $x^2+4=0$ **ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ಬಿಡಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲವೆಂದಾಯಿತು.**

ಇದೇ ರೀತಿ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಉಪಯೋಗಕ್ಕೆ ಮಿತಿಯಿರುವ ಅನೇಕ ಸಂದರ್ಭಗಳು ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಬರುತ್ತವೆ. ಅಂತಹ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ (ಉದಾ : $x^2+4=0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸುವಿಕೆ) ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದಾದಂತಹ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಅವಶ್ಯಕತೆಯನ್ನು ಎಷ್ಟು ಒತ್ತಿ ಹೇಳಿದರೂ ಸಾಲದು. ಇಂತಹ ಸಂಖ್ಯೆಯೇ, ಮುಂದೆ ನಿರೂಪಿಸುವ $a+ib$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ.

2·47 ವ್ಯಾಖ್ಯೆ : $a, b\in R$ ಮತ್ತು $i=\sqrt{-1}$ ಆದಾಗ $a+ib$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ ಬರುವ i ಎಂಬ ಸಂಕೇತವನ್ನು **ಊಹ್ಯಾ ಏಕ**ವೆಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.

2·48 ಟೀಕೆ : $i^2=\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}=-1$ ಎಂಬುದನ್ನು ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ ಮತ್ತು $a\in R$ ಆದಾಗ $axi=ixa=ia$ ಎಂದು ಬರೆಯೋಣ. a ಮತ್ತು bಗಳು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದಾಗ $a+ib$ ಎಂಬುದನ್ನು ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆಯೆಂದು ಕರೆದಿರುವುದು ಸರಿಯಷ್ಟೆ. ಇದರಲ್ಲಿ **a**ಯನ್ನು **a + ib** ಸಂಖ್ಯೆಯ **ವಾಸ್ತವ ಭಾಗ**ವೆಂದೂ ಮತ್ತು **b**ಯನ್ನು **ಊಹ್ಯಾ ಭಾಗ**ವೆಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇಂತಹ ಎಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಗಣವನ್ನು **ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ**ವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಈ ಗಣವನ್ನು **C** ಎಂಬ ಸಂಕೇತಾಕ್ಷರದಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ,

$$C=\{z|z=a+ib,\ a\in R,\ b\in R\}$$

ಅಲ್ಲದೆ $a\in R$ ಆದಾಗ, $a=a+i0\in C \quad \therefore \quad R\subset C$

ಆದ್ದರಿಂದ : $N\subset I_+\subset I\subset F\subset R\subset C$

2.49 ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣದಲ್ಲಿ ಆಚರಣೆಗಳು : ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಅನ್ವಯಿಸುವಂತೆ **ಸಮತ್ವ, ಸಂಕಲನ, ವ್ಯವಕಲನ, ಗುಣಾಕಾರ** ಮತ್ತು **ಭಾಗಾಕಾರ** ಎಂಬ ಆಚರಣೆಗಳನ್ನು ಈಗ ನಿರೂಪಿಸುತ್ತೇವೆ. ಕೆಳಗಿನ ನಿರೂಪಣೆಯಲ್ಲಿ $a, b, c, d \in R$ ಮತ್ತು $p = a + ib$ ಮತ್ತು $q = c + id$ ಎನ್ನೋಣ.

1) **ಸಮತ್ವ :** $p = q$ ಆದರೆ, ಮತ್ತು ಆದಾಗ ಮಾತ್ರ $a = c$ ಮತ್ತು $b = d$ ಎಂದು ಒಪ್ಪಿಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ.

2) **ಸಂಕಲನ :**
$$\begin{aligned} p+q &= a+ib+c+id \\ &= a+c+i\times b+i\times d \\ &= a+c+i\times(b+d) \\ &= a+c+i(b+d), \end{aligned}$$
ಇಲ್ಲಿ $a+c \in R$ ಮತ್ತು $b+d \in R \quad \therefore \quad p+q \in C$

ಅಂದರೆ C ಗಣವು ಸಂಕಲನದಲ್ಲಿ ಅವೃತವಾಗಿದೆ.

3) **ವ್ಯವಕಲನ :**
$$\begin{aligned} p-q &= p+(-q) \\ &= a+ib+\{-(c+id)\} \\ &= a+ib-c-id \\ &= a-c+i(b-d) \in C \end{aligned}$$
[ಏಕೆ ?]

ಆದ್ದರಿಂದ C ಗಣವು ವ್ಯವಕಲನದಲ್ಲಿ ಅವೃತವಾಗಿದೆ.

4) **ಗುಣಾಕಾರ :**
$$\begin{aligned} p\times q &= (a+ib)\,(c+id) \\ &= ac+aid+ibc+i^2bd \\ &= ac+i(ad+bc)-1\cdot bd \\ &= ac-bd+i(ad+bc) \in C \end{aligned}$$
[ಏಕೆ ?]

ಆದ್ದರಿಂದ C ಗಣವು ಗುಣಾಕಾರದಲ್ಲಿ ಅವೃತವಾಗಿದೆ.

5) **ಭಾಗಾಕಾರ :**
$$\frac{p}{q} = \frac{a+ib}{c+id} \quad (c^2+d^2 \neq 0 \text{ ಎಂದಿರಲಿ})$$
$$= \frac{a+ib}{c+id} \times \frac{c-id}{c-id}$$

$$=\frac{ac-i^2bd+ibc-iad}{c^2-i^2d^2}$$

$$=\frac{ac+bd+i(bc-ad)}{c^2+d^2}$$ [ಏಕೆ ?]

$$=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+i\cdot\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\in C$$

ಆದ್ದರಿಂದ C ಗಣವು ಭಾಗಾಕಾರದಲ್ಲಿ ಅವೃತವಾಗಿದೆ.

2·50 ವ್ಯಾಖ್ಯೆ : $a+ib\in C$ ಮತ್ತು $a-ib\in C$ ಎನ್ನೋಣ. ಆಗ $a+ib$ $a-ib$ ಗಳನ್ನು ಪರಸ್ಪರ **ಅನುವರ್ತ ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆ**ಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. $z=a+ib$ ಆದರೆ, ಇದರ ಅನುವರ್ತ ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು $\overline{z}$ ಎಂಬ ಸಂಕೇತದಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ $\overline{z}=a-ib$.

2·51 ಅನುವರ್ತ ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಕೆಲವು ಗುಣಗಳು :

(i) $\overline{\overline{z}}=z$. ಏಕೆಂದರೆ, $\overline{\overline{z}}=\overline{(\overline{z})}$

$$=\overline{(a-bi)}$$

$$=a+bi$$

$$=z$$

(ii) $\frac{z+\overline{z}}{2}=a=z$ನ ವಾಸ್ತವ ಭಾಗ.

ಏಕೆಂದರೆ : ಎಡಬದಿ $=\frac{a+ib+a-bi}{2}$

$$=\frac{2a}{2}=a=\text{ಬಲಬದಿ.}$$

(iii) $\frac{z-\overline{z}}{2}=b=z$ನ ಊಹ್ಯ ಭಾಗ.

(iv) $z\,\overline{z}=a^2+b^2\in R$

ಏಕೆಂದರೆ : $z\,\overline{z}=(a+ib)\,(a-ib)$

$$=a^2-i^2b^2$$

$$=a^2+b^2\in R$$

(v) $$\frac{z\,\bar{z}}{a^2+b^2} = 1 = \frac{\bar{z}\,z}{a^2+b^2}$$ [$a^2+b^2 \neq 0$ ಆದಾಗ]

ಈ ಗಣವು ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ **ಗುಣಾಕಾರದ ಪ್ರತಿಲೋಮದ** ಇರುವಿಕೆಯನ್ನು ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುತ್ತದೆ.

2·52 ಉದಾ : (i) $x^2+4=0$ (ii) $\frac{x+3i}{x-3i} = i$ ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸೋಣ.

ಸಾಧನೆ : (i) ಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ :

$x^2+4=0$. $\therefore$ $x^2=-4$. $\therefore$ $x=\sqrt{-4}$

ಅಥವಾ $x=\sqrt{-1\times 4}=\sqrt{-1}\times\sqrt{4}=i2=2i$

(ii) ಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ :

$$\frac{x+3i}{x-3i}\times x-3i = i\,(x-3i)$$

$\therefore$ $(x+3i)=i\,(x-3i)$ [ಸಮರ್ಥಿಸಿರಿ]

$\therefore$ $x+3i=ix-3i^2=ix+3$

$\therefore$ $x-ix=3-3i$

$\therefore$ $x(1-i)=3(1-i)$

$\therefore$ $x=3$. [ಸಮರ್ಥಿಸಿರಿ]

ಅಭ್ಯಾಸ 2·4

1. ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಆರು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಕೊಡಿರಿ.

2. $p, q, r \in C$ ಆದರೆ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

   (a) (i) $p+q=q+p$ [ಪರಿವರ್ತನೀಯ ನಿಯಮ].

   (ii) $pq=qp$.

   (b) (i) $(p+q)+r=p+(q+r)$ [ಸಹವರ್ತನೀಯ ನಿಯಮ].

(ii) $(pq)r=p(qr)$.

(c) $(p+q)r=pr+qr$ [ವಿಭಾಜಕ ನಿಯಮ].

3. $z\in C$ ಎನ್ನೋಣ. $z+0=0+z=z$ ಇರುವಂತೆ 0 ಎಂಬ ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಯು C ಗಣದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ [ಇದು C ಗಣದಲ್ಲಿ ಸಂಕಲನದ ಏಕವೆಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ].

4. $z=a+ib\in C$ ಎಂದಿರಲಿ. $z^{-1}\in C$ ಮತ್ತು $z\,z^{-1}=1=z^{-1}z$ ಆದರೆ, z^{-1} ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು a ಮತ್ತು b ಗಳಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿರಿ. ಈ ರೀತಿ z^{-1} ಸಂಖ್ಯೆಯು C ಗಣದಲ್ಲಿ ದೊರೆಯಬೇಕಾದರೆ, a ಮತ್ತು bಗಳು ಪಾಲಿಸಬೇಕಾದ ನಿರ್ಬಂಧಗಳೇನು ? [ಇಲ್ಲಿ $z^{-1}=z$ನ ಗುಣಾಕಾರದ ಪ್ರತಿಲೋಮವೆಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಿ].

5. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವಾಸ್ತವ ಮತ್ತು ಊಹ್ಯಾಭಾಗಗಳನ್ನು ಬೇರೆ ಮಾಡಿರಿ.

(i) $2+3i+4(1-8i)-7i$

(ii) $(2+5i)(5-2i)+10-12i$

(iii) $\dfrac{2+3i}{4-5i}+\dfrac{2-3i}{4+5i}$ (iv) $\dfrac{1-i}{1+i}$

6. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಗುಣಾಕಾರದ ಅನುಲೋಮ (ಪ್ರತಿಲೋಮ)ವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ. ಅವುಗಳನ್ನು $a+ib$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

(i) $(1-i\sqrt{3})(\sqrt{3}-i)$, (ii) $(1-i)(2+3i)$. (iii) $(4-5i)7i$. (iv) $11+13i$.

7. $z_1=3+2i$, $z_2=2+3i$, $z_3=2-3i$ ಮತ್ತು $z_4=3-2i$ ಆದರೆ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(i) $z_1z_2z_3z_4=169$ (ii) $z_1\,\overline{z_2}=z_4\,z_3$

(iii) $(z_1/z_2)=(z_3/z_4)$. (iv) $z_1+z_2=\overline{z_1}+z_2$

(v) $\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$ (vi) $(z_1/z_2)=(\overline{z_1}\,/\,\overline{z_2})$

8. z_1, z_2 ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಂದು ತಿಳಿದು ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(i) $\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$

(ii) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} . \overline{z_2}$

(iii) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

(iv) $z = \overline{z}$ ಆ ಆ ಮಾತ್ರ z ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ.

(v) $z = -\overline{z}$ ಆ ಆ ಮಾತ್ರ z ಒಂದು ಊಹ್ಯಾ ಸಂಖ್ಯೆ.

9. ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.

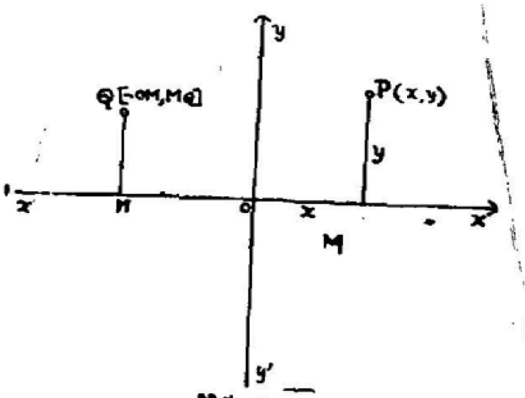
(i) $\frac{2x}{5} - \frac{i}{4} = 0$ (ii) $\frac{x+4i}{x-4i} = 1-i$

(iii) $9x^2 + 63 = 0$ (iv) $x^2+x+1 = 0$

3

ಸಂಬಂಧ, ಸಂಬಂಧಕ ಮತ್ತು ನಕ್ಷೆ

3·1 x′ox ಮತ್ತು y′oy ಎಂಬ o ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇದಿಸುವ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. o ಬಿಂದುವನ್ನು **ಮೂಲಬಿಂದು**ವೆಂದು ಕರೆಯೋಣ. x′ox ರೇಖೆಯನ್ನು x– ಅಕ್ಷವೆಂದೂ ಮತ್ತು y′oyಯನ್ನು y– ಅಕ್ಷವೆಂದೂ ಕರೆಯೋಣ. ಈ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಸಮತಳವನ್ನು (ಹಾಳೆಯನ್ನು) ನಾಲ್ಕು ಸಮಭಾಗಗಳಾಗಿ ಮಾಡುತ್ತವೆ (ಚಿತ್ರ 3·1·1 ನೋಡಿರಿ)

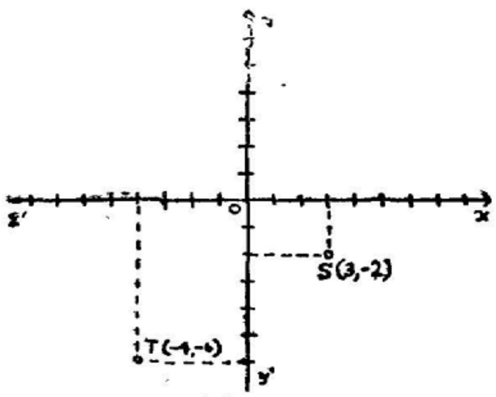


ಚಿತ್ರ : 3.1.1

ಸಮತಳದ xoy ಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಬಿಂದು P ಆದರೆ, PM ಅನ್ನು P ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ox ರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯೋಣ. OM ಮತ್ತು MPಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ x ಮತ್ತು y ಎಂಬ ಸಂಕೇತಗಳಿಂದ ಸೂಚಿಸೋಣ. ಈಗ P ಬಿಂದುವಿನೊಡನೆ (x, y) ಎಂಬ **ಕ್ರಮಯುಗ್ಮ**ವನ್ನು ಹೊಂದಿಸೋಣ. ಹೀಗೆ P ಬಿಂದುವಿನೊಡನೆ ಹೊಂದಿಸಿದ **x,y** ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ P ಬಿಂದುವಿನ **x–ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ, y– ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ**ಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. P ಎಂಬುದು ಸಮತಳದ xoy ಪ್ರದೇಶದಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಾದರೂ, ಅದರೊಡನೆ (OM, MP) ಎಂಬ ಕ್ರಮಯುಗ್ಮವನ್ನು ಹೊಂದಿಸಬಹುದೆಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ. ಹೀಗೆ ಹೊಂದಿಸಿದ (OM, MP) ಕ್ರಮಯುಗ್ಮದಲ್ಲಿ OM = **y–ಅಕ್ಷದಿಂದ P ಬಿಂದುವಿನ ಲಂಬದೂರ** ಮತ್ತು MP= **x–ಅಕ್ಷದಿಂದ P ಬಿಂದುವಿನ ಲಂಬದೂರ** ಎಂಬುದನ್ನು ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡೋಣ. ಅಂದರೆ, OM= MP] ವಿನಃ :

$$(OM, MP) \neq (MP, OM)$$

ಎಂಬ ವಿಷಯವು ಸುಲಭವಾಗಿ ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ. ಈಗ ox, oy ಗಳ ಮೇಲೆ ಅಥವಾ ಇವುಗಳಿಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಅಳೆದ ದೂರಗಳನ್ನು ಧನವೆಂದೂ ಮತ್ತು ox′, oy′ ಗಳ ಮೇಲೆ ಅಥವಾ ಇವುಗಳಿಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಅಳೆದ ದೂರಗಳನ್ನು ಋಣವೆಂದೂ ಒಪ್ಪಿಕೊಳ್ಳೋಣ. ಹೀಗೆ ಮಾಡಿಕೊಂಡ ಒಪ್ಪಂದದಿಂದ **ಸಮತಳದ ಮೇಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನೊಡನೆ ಒಂದು ಕ್ರಮಯುಗ್ಮವನ್ನು ಏಕೈಕ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೊಂದಿಸಬಹುದೆಂಬ** ವಿಷಯವು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುತ್ತದೆ. ಏಕೆಂದರೆ, x′oy ಪ್ರದೇಶದಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬಿಂದು Q ಆದರೆ, ಅದರೊಡನೆ (—OM, MQ), ಕ್ರಮಯುಗ್ಮವನ್ನು ಏಕೈಕ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೊಂದಿಸಬಹುದು, (ಚಿತ್ರ 3.1.1 ನೋಡಿರಿ).



ಚಿತ್ರ : 3.1.2

ಈ ವಿಷಯವು ಚಿತ್ರ : 3.1.2ರ ಅವಲೋಕನೆಯಿಂದ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುತ್ತದೆ. ಇದರಲ್ಲಿ (-4,-6) ಮತ್ತು (3,-2) ಎಂಬ ಕ್ರಮಯುಗ್ಮದ್ವಯಗಳೊಡನೆ T, S ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಏಕೈಕ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೊಂದಿಸಬಹುದೆಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಈ ವಿಷಯವನ್ನು ಈಗ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಮೇಯದಲ್ಲಿ ನಿರೂಪಿಸುತ್ತೇವೆ.

3·2 ಪ್ರಮೇಯ : ಸಮತಳದಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನೊಡನೆ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾದ * ಕ್ರಮಯುಗ್ಮವನ್ನು ಏಕೈಕ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೊಂದಿಸಬಹುದು ಮತ್ತು ವಿಲೋಮವಾಗಿ, ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಕ್ರಮಯುಗ್ಮದೊಡನೆ ಸಮತಳದಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬಿಂದುವನ್ನು ಏಕೈಕ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೊಂದಿಸಬಹುದು.

3.3 ಟೀಕೆ : (x, y) ಮತ್ತು (p, q)ಗಳು ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಕ್ರಮಯುಗ್ಮಗಳಾದರೆ, ಅವು ಪರಸ್ಪರ ಸಮ– ಅಂದರೆ, (x, y)=(p, q) ಆದರೆ, ಮತ್ತು ಆದಾಗ ಮಾತ್ರ x=p, y=q.

ಅಭ್ಯಾಸ 3.1

ಸೂಚನೆ : ಕೆಳಗಿನ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು (ಲೆಖ್ಖಗಳು 1ರಿಂದ 5) ಸಮರ್ಥಿಸಿರಿ.

1. x– ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ y– ನಿರ್ದೇಶಾಂಕವು

* ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಕ್ರಮಯುಗ್ಮವೆಂದು ಭಾವಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಶೂನ್ಯಕ್ಕೆ ಸಮ.

2. y– ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ x– ನಿರ್ದೇಶಾಂಕವು ಶೂನ್ಯಕ್ಕೆ ಸಮ.

3. ಮೂಲ ಬಿಂದು O = (0, 0).

4. $\lfloor yox$ ಕೋನವನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನೊಡನೆ (a, a) ($a \in R$) ಎಂಬ ಕ್ರಮಯುಗ್ಮವನ್ನು ಹೊಂದಿಸಬಹುದು.

5. ಮೂಲಬಿಂದುವನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗುಳ್ಳ ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯ = **a** ಇರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯೋಣ. ಈ ವೃತ್ತದ ಪರಿಧಿಯ ಮೇಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು (x, y) ಆದರೆ, ಮತ್ತು ಆದಾಗ ಮಾತ್ರ $a^2=x^2+y^2$.

6. x′ox ಮತ್ತು y′oy **ಅಕ್ಷರೇಖೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿ ಛೇದಿಸಿರುವ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲೂ, ಸಮತಳದ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನೊಡನೆ ಒಂದೇ ಒಂದು ಕ್ರಮಯುಗ್ಮವನ್ನು ಹೊಂದಿಸಬಹುದು (ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು ಈ ರೀತಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ, ಅವುಗಳನ್ನು ಓರೆ ಅಕ್ಷಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ).**

3·4 ವ್ಯಾಖ್ಯೆ : A ಮತ್ತು Bಗಳು ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಶೂನ್ಯಕ್ಕಿಂತ ಭಿನ್ನವಾದ ಗಣಗಳಾದರೆ, A ಮತ್ತು Bಗಳ **ಗುಣಲಬ್ಧ ಗಣ** A X Bಯನ್ನು

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}$$

ಎಂದು ನಿರೂಪಿಸುತ್ತೇವೆ. $(a, b) \in A \times B$ ಇರುವಾಗ **a**ಯನ್ನು **ಮೊದಲ ಪದ**ವೆಂದೂ ಮತ್ತು **b**ಯನ್ನು **ಎರಡನೆಯ ಪದ**ವೆಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

3·5 ಟೀಕೆ : $A \times B$ಯು ಕ್ರಮಯುಗ್ಮಗಳ ಗಣವೆಂಬುದನ್ನು ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡೋಣ. ಸಮತಳದ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು (x, y) ಎಂಬ ಕ್ರಮಯುಗ್ಮ ಸೂಚಿಸಿದರೆ, $(x, y) \in R \times R$ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ.

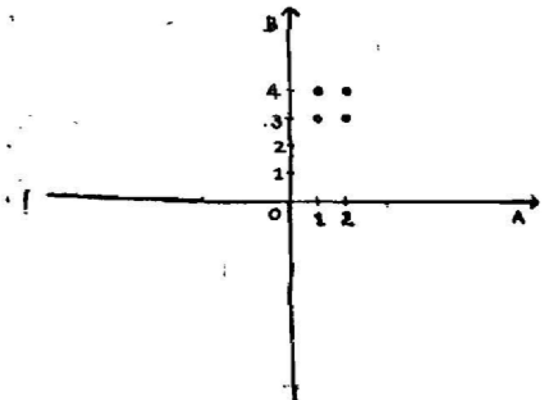
3·6 ಉದಾ : $A = \{1\}$ ಮತ್ತು $B = \{2\}$ ಎನ್ನೋಣ.

ಈಗ $A \times B = \{(1, 2)\}$ ಮತ್ತು $B \times A = \{(2, 1)\}$

ಆದ್ದರಿಂದ, $A \times B \neq B \times A$

3 7 ಉದಾ : $A=\{(1, 2\}$, $B=\{3, 4\}$ ಆದರೆ, $A\times B$ ಮತ್ತು $B\times A$ಗಳನ್ನು ಬರೆಯೋಣ ಮತ್ತು $A\times B$ಯ ಗಣಾಂಶಗಳು ನಿರ್ಧರಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸಮತಳದಲ್ಲಿ ಗುರುತಿಸೋಣ.

$$A\times B=\{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$$
$$B\times A=\{(3, 1)\}, (4, 1), (3, 2), (4, 2)\}$$



ಚಿತ್ರ : 3.7.1

ಚಿತ್ರ 3·7·1ರಲ್ಲಿ $A\times B$ ಗಣದ ಗಣಾಂಶಗಳು ನಿರ್ಧರಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಈ ಚಿತ್ರವನ್ನು $A\times B$ ಗಣದ **ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ಚಿತ್ರ**ವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

3·8 ವ್ಯಾಖ್ಯೆ : A, Bಗಳು ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಶೂನ್ಯಕ್ಕಿಂತ ಭಿನ್ನವಾದ ಗಣಗಳಾದರೆ, $A \times B$ ಗಣದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಉಪಗಣವನ್ನು Aದಿಂದ Bಗೆ ಇರುವ ಒಂದು **ಸಂಬಂಧ**ವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾ : $A=\{1, 2\}$, $B=\{2, 3, 4\}$ ಎನ್ನೋಣ. ಆಗ,

$$A\times B=\{ (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4) \} \quad [3·8·1]$$

$$R=\{(a, b)|a\in A, b\in B \text{ ಮತ್ತು } a<b\}$$ ಎಂದು ನಿರೂಪಿಸಿದರೆ, $R=\{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2. 4)\}$ [3·8·2]

$R\subset A\times B$ ಎಂಬುದು [3.8.1] ಮತ್ತು [3.8.2]ರ ಅವಲೋಕನೆಯಿಂದ ಗೊತ್ತಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ R ಎಂಬುದು Aದಿಂದ Bಗೆ ಇರುವ ಒಂದು ಸಂಬಂಧವನ್ನು ನಿರ್ಣಯಿಸುತ್ತದೆ.

3·9 ಟೀಕೆ : R ಎಂಬುದು Aದಿಂದ Bಗೆ ಇರುವ ಒಂದು ಸಂಬಂಧವಾದರೆ, $(a, b)\in R$ ಎಂಬುದನ್ನು $_aR_b$ ಎಂಬ ಸಂಕೇತದಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ $_aR_b$ ಎಂಬ ಸಂಕೇತಕ್ಕೆ 'aಯು bಯೊಡನೆ R- ಸಂಬಂಧ ಪಡೆದಿದೆ' ಎಂಬ ಅರ್ಥವನ್ನು ಕೊಡುತ್ತೇವೆ. ಇದೇ ರೀತಿ $(c, d)\notin R$ ಎಂಬುದನ್ನು $_c\sim R_d$ ಎಂಬ ಸಂಕೇತದಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು $_c\sim R_d$ ಎಂಬ ಸಂಕೇತಕ್ಕೆ 'cಯು dಯೊಡನೆ R ಸಂಬಂಧ ಪಡೆದಿಲ್ಲ' ಎಂಬ ಅರ್ಥವನ್ನು ಕೊಡುತ್ತೇವೆ. ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆ

ಯಲ್ಲಿ $(1, 2) \in R$ ಅಥವಾ $_1R_2$ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ. ಅಂದರೆ, 1 2ರೊಡನೆ R-ಸಂಬಂಧ ಪಡೆದಿದೆ. ಇದೇ ರೀತಿ $_2R_4$, $_1R_3$ ಮತ್ತು $_1R_4$ ಎಂಬ ಸಂಬಂಧಗಳು ಯುಕ್ತವಾಗುತ್ತವೆ.

$2 \in A$, $2 \in B$ ಮತ್ತು $2 \nless 2$ ಇರುವುದರಿಂದ $(2, 2) \notin R$ ಅಥವಾ $_2\sim R_2$ ಎಂಬುವನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ. ಅಂದರೆ, 2 2ರೊಡನೆ R-ಸಂಬಂಧಪಡೆದಿಲ್ಲ.

3·10 ಟೀಕೆ : A X A ಗಣದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಉಪಗಣವನ್ನು, ಅಂದರೆ **A**ದಿಂದ**A**ಗೆ ಇರುವ ಸಂಬಂಧವನ್ನು A ಮೇಲಿನಸಂಬಂಧವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಟೀಕೆ : aಯು bಯನ್ನು ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ ಅಥವಾ aಯು bಯ ಅಪವರ್ತನ ಎಂಬ ವಿಷಯವನ್ನು a/b ಎಂಬ ಸಂಕೇತದಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.
ಉದಾ : 2 6ನ್ನು ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಸಂಕೇತದಲ್ಲಿ 2/6 ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು,

3.11 ಉದಾ : $A = \{2, 4, 6, 8, 9\}$ ಮತ್ತು $B = \{3, 9, 2\}$ ಎನ್ನೋಣ. ಆಗ $R = \{(a, b) | a \in A, b \in B$ ಮತ್ತು $b|a\}$ ಎಂದು ನಿರೂಪಿಸಿದರೆ. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಂಬಂಧಗಳು ಯುಕ್ತವೇ, ಅಯುಕ್ತವೇ, ನಿರ್ಧರಿಸೋಣ.

(i) $_6R_3$: ಯುಕ್ತ, ∵ 3|6
(ii) $_2R_3$: ಅಯುಕ್ತ, ∵ 2 3ನ್ನು ಭಾಗಿಸುವುದಿಲ್ಲ.
(iii) $_2\sim R_3$: ಯುಕ್ತ, ∵ .... [ಭರ್ತಿಮಾಡಿರಿ]
(iv) $_2R_2$: ಯುಕ್ತ [ಏಕೆ ?]
(v) $_9R_9$: .... [ಭರ್ತಿಮಾಡಿರಿ,]
(vi) $_8\sim R_2$: .... [– ,, –]
(vii) $_8R_8$: .... [– ,, –]
(viii) $_1R_1$: .... [– ,, –]
(ix) $_5\sim R_{10}$: .... [– ,, –]

3·12 ಟೀಕೆ : Aಯಿಂದ Bಗೆ ಇರುವ ಒಂದು ಸಂಬಂಧ R ಆದರೆ, $R \subset A \times B$ [3.8 ವ್ಯಾಖ್ಯೆ ನೋಡಿರಿ]. ಆದ್ದರಿಂದ $(a, b) \in A \times B$ ಇರುವಾಗ ಕೇವಲ ಎರಡೇ ಎರಡು ಸಾಧ್ಯತೆಗಳುಂಟು. ಅವು ಯಾವುವು ? $(a, b) \in R$ ಅಥವಾ $(a, b) \notin R$. ಅಂದರೆ aRb ಅಥವಾ $a\sim Rb$ಎಂಬುದನ್ನು ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆಗಳು :

(i) G ಎಂಬುದು ಎಲ್ಲಾ ಯುವಕರ ಗಣ ಮತ್ತು L ಎಂಬುದು ಎಲ್ಲಾ ಯುವತಿಯರ ಗಣವಾದರೆ, ಆಗ ಮದುವೆ $\equiv M$ ಎಂಬುದು Gಯಿಂದ Lಗೆ ಇರುವ ಒಂದು ಸಂಬಂಧವನ್ನು ನಿರ್ಣಯಿಸುತ್ತದೆ. ಏಕೆಂದರೆ, $g \in G$ ಎಂಬ ಯುವಕನು $l \in L$ ಎಂಬ ಯುವತಿಯನ್ನು ಮದುವೆಯಾಗಬಹುದು ಅಥವಾ ಮದುವೆಯಾಗದಿರಬಹುದು. ಅಂದರೆ, gMl ಅಥವಾ $g \sim Ml$ ಸಂಕೇತದಲ್ಲಿ :

ಮದುವೆ $\equiv M = \{(g, l) \mid g \in G, l \in L$ ಮತ್ತು $gMl\}$

(ii) P ಎಂಬುದು ಸಮತಳದಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಬಿಂದುಗಳ ಗಣವೂ ಮತ್ತು L ಎಂಬುದು ಸಮತಳದಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಗಣವೂ ಆದರೆ, ಆಗ ಹಾದು ಹೋಗು $\equiv H$ ಎಂಬುದು L ಗಣದಿಂದ P ಗಣಕ್ಕೆ ಇರುವ ಒಂದು ಸಂಬಂಧವಾಗುತ್ತದೆ. ಏಕೆಂದರೆ, $l \in L$ ಎಂಬ ಸರಳರೇಖೆಯು $p \in P$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗಬಹುದು ಅಥವಾ ಹಾದುಹೋಗದಿರಬಹುದು. ಅಂದರೆ lHp ಅಥವಾ $l \sim Hp$ ಸಂಕೇತದಲ್ಲಿ :

ಹಾದುಹೋಗು $\equiv H = \{(l, p) \mid (l, p) \in L \times P$ ಮತ್ತು $lHp\}$

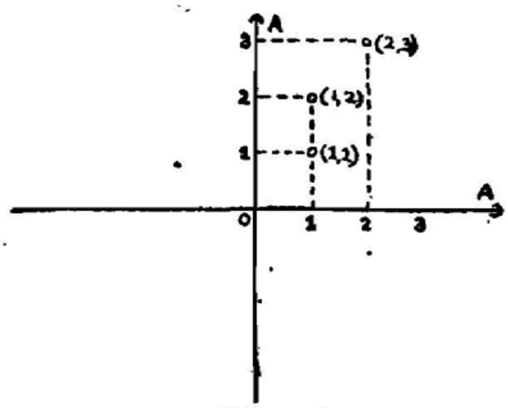
(iii) S ಎಂಬುದು ಎಲ್ಲಾ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಗಣವಾದರೆ, ಆಗ ಸಮಾನಾಂತರತ್ವ $\equiv \parallel$ ಎಂಬುದು S ಗಣದ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಸಂಬಂಧವಾಗುತ್ತದೆ. ಏಕೆಂದರೆ, $a, b \in S$ ಎಂಬುವು ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳಾದರೆ, $a \parallel b$ ಅಥವಾ $a \nparallel b$. ಸಂಕೇತದಲ್ಲಿ :

ಸಮಾನಾಂತರತ್ವ $\equiv \parallel = \{(a, b) \mid a, b \in S$ ಮತ್ತು $a \parallel b\}$

(iv) R ಗಣವು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣವೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಆಗ 'ಗಿಂತ ಕಡಮೆ' $\equiv <$ ಎಂಬುದು R ಗಣದ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಸಂಬಂಧವಾಗುತ್ತದೆ. ಏಕೆಂದರೆ, $x, y \in R$ ಆದಾಗ. $x < y$ ಅಥವಾ $x \nless y$. ಸಂಕೇತದಲ್ಲಿ :

'ಗಿಂತ ಕಡಮೆ' $\equiv < = \{(x, y) \mid (x, y) \in R \times R$ ಮತ್ತು $x < y\}$

(v) ಚಲನಚಿತ್ರ ವೀಕ್ಷಣೆಯೆಂಬುದು ಎಲ್ಲಾ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಗಣದಿಂದ ಪ್ರದರ್ಶಿಸಲಾಗುತ್ತಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಚಲನಚಿತ್ರಗಳ ಗಣಕ್ಕೆ ಇರುವ ಒಂದು ಸಂಬಂಧ. ಏಕೆಂದರೆ, ಯಾವುದೇ ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು, ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಚಲನಚಿತ್ರವನ್ನು ವೀಕ್ಷಿಸುತ್ತಾನೆ ಅಥವಾ ಇಲ್ಲ.



ಚಿತ್ರ : 3.12.1

(vi) $A=\{1, 2, 3\}$ ಆದರೆ, $R=\{(1, 1), (1, 2), (2, 3)\} \subset A \times A$ ಎಂಬುದು A ಗಣದ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಸಂಬಂಧ. ಈ ಸಂಬಂಧದ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಚಿತ್ರ 3·12·1ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿದೆ,

---

ಅಭ್ಯಾಸ 3·2

1. $A=\{1\}, B=\{2, 3\}$ ಆದರೆ $A \times B$ ಮತ್ತು $B \times A$ ಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ. ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

2. $\{1, 2, 3\}=X, \{4, 5\}=Y$ ಆದರೆ $X \times Y$ ಮತ್ತು $Y \times X$ ಗಣಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ,

3. $A=\{3, 9, 12\}$ ಮತ್ತು $B=\{9, 27, 36\}$ ಎನ್ನೋಣ. $R \subset A \times B$ ಮತ್ತು aRb ಆದರೆ, ಮತ್ತು ಆದಾಗ ಮಾತ್ರ $a < b$ ಎಂದು ತಿಳಿದು R ಗಣದ ಗಣಾಂಶಗಳನ್ನು ಪಟ್ಟಿಮಾಡಿ.

4. $A=\{1, 2, 3\}$ದಿಂದ $B=\{2, 4, 9\}$ಗೆ ಇರುವ ಒಂದು ಸಂಬಂಧ R ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. $(a, b) \in R$ ಆ ಆ ಮಾತ್ರ $a|b$ ಎಂದು ತಿಳಿದು R ಗಣವನ್ನು ಪಟ್ಟಿವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

5. $=\sqrt{}$ ಎಂಬುದು $A=\{3, 4, 9, 16, 25, 36\}$ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಸಂಬಂಧ ಆಗಿರಲಿ. $a=\sqrt{}\, b$ ಆ ಆ ಮಾತ್ರ $a^2=b$ ಎಂದು ತಿಳಿದು $=\sqrt{}$ ಎಂಬ ಗಣವನ್ನು ಪಟ್ಟಿವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

6. $=\sqrt{}$ ಎಂಬುದು ಮೇಲಿನ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ A ಗಣದ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಸಂಬಂಧವಾದರೆ, ಮತ್ತು ಆದರ ನಿರೂಪಣೆ $a=\sqrt{}\, b$ ಆದರೆ, ಮತ್ತು ಆದಾಗ ಮಾತ್ರ $a=-\sqrt{}\, b$ ಎಂದು ತಿಳಿದು $=\sqrt{}$ ಗಣವನ್ನು ಪಟ್ಟಿ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

7. $A=\{1, 2, 3, 7, 8, 10, 12\}$ ಮತ್ತು $B=\{2, 8, 9, 11, 5, 6\}$ ಆಗಿರಲಿ. $R=\{(1, 2), (2, 9), (8, 6), (10, 11), (7, 5)\}$ ಎಂಬುದು,

Aದಿಂದ Bಗೆ ಇರುವ ಒಂದು ಸಂಬಂಧವಾದಾಗ $_1R_2$, $_1R_9$, $_2{\sim}R_9$, $_2R_6$, $_8R_8$, $_{10}{\sim}R_{11}$, $_3{\sim}R_6$, $_7R_5$, $_8R_6$, $_2R_5$, $_{12}{\sim}R_8$ ಮತ್ತು $_1R_5$ ಎಂಬುವು ಯುಕ್ತವೋ. ಅಯುಕ್ತವೋ ನಿರ್ಧರಿಸಿರಿ.

3·13 ಟೀಕೆ : $f\subset A\times B$ ಎಂಬುದು Aಯಿಂದ Bಗೆ ಇರುವ ಒಂದು ಸಂಬಂಧದಾವಾಗ $(a,\ b)\in f$ ಆದರೆ, $a\in A$ಗೆ f ಸಂಬಂಧವು $b\in B$ಯನ್ನು ನಿಯೋಜಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾ : (i) $A=\{1, 2\}$ ಮತ್ತು $B=\{3, 4, 5\}$ ಎನ್ನೋಣ. ಈಗ $f=\{(1, 3), (2, 5)\}$ ಆದರೆ f Aದಿಂದ Bಗೆ ಇರುವ ಒಂದು ಸಂಬಂಧವಾಗುತ್ತದೆ [ಏಕೆ ?] ಆದ್ದರಿಂದ,

$1\in A$ಗೆ f ಸಂಬಂಧವು $3B\in$ ಯನ್ನು ನಿಯೋಜಿಸುತ್ತದೆ.

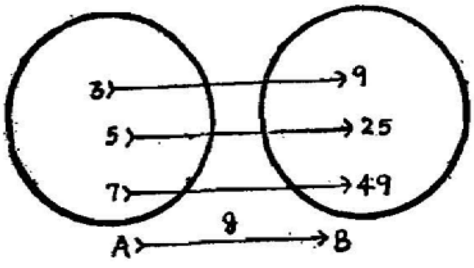
$2\in A$ಗೆ f ಸಂಬಂಧವು $5\in B$ಯನ್ನು ನಿಯೋಜಿಸುತ್ತದೆ.

(ii) $A=\{3, 5, 7\}$ ಮತ್ತು $B=\{9, 25, 49\}$ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. Aದಿಂದ Bಗೆ ಇರುವ ಸಂಬಂಧ gಯನ್ನು

$$g=\{(a,\ b)\mid a\in A,\ \ b\in B \text{ ಮತ್ತು } a^2=b\}$$

ಎಂದು ನಿರೂಪಿಸಿದರೆ :

$3\in A$ಗೆ gಸಂಬಂಧವು $9\in B$ಯನ್ನು ನಿಯೋಜಿಸುತ್ತದೆ;



ಚಿತ್ರ: 3.13.1

$5\in A$ಗೆ gಸಂಬಂಧವು $25\in B$ ಯನ್ನು ನಿಯೋಜಿಸುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು $7\in A$ಗೆ gಸಂಬಂಧವು $49\in B$ ಯನ್ನು ನಿಯೋಜಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ನಿಯೋಜನೆಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಚಿತ್ರಗಳ ಮೂಲಕ ನಿಯೋಜಿಸಬಹುದು. [ಚಿತ್ರ:3·13·1 ನೋಡಿರಿ]

3·14 ವ್ಯಾಖ್ಯೆ : f ಸಂಬಂಧವು Aಗಣದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗಣಾಂಶಕ್ಕೂ B ಗಣದ ಒಂದೇ ಒಂದು ಗಣಾಂಶವನ್ನು ಏಕೈಕ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ನಿಯೋಜಿಸಿದರೆ, ಆಗ f ಸಂಬಂಧವನ್ನು Aದಿಂದ Bಗೆ ಇರುವ ಒಂದು **ಸಂಬಂಧಂಕ** ವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು ಸಂಕೇತದಲ್ಲಿ :

$$\mathbf{f : A \rightarrow B} \text{ ಅಥವಾ } \mathbf{A \xrightarrow{f} B}$$

ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ರೀತಿ $a \in A$ ಗೆ f ಸಂಬಂಧವು $b \in B$ಯನ್ನು ನಿಯೋಜಿಸಿದರೆ, $(a, b) \in f$ ಎಂಬುದು ಸರಿಯಷ್ಟೆ [ಏಕೆ ?]. ಆಗ **b**ಯನ್ನು **f**ನಲ್ಲಿ **a**ಯ **ಪ್ರತಿಬಿಂಬವೆಂದು** ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಸಂಕೇತದಲ್ಲಿ $\mathbf{b=f(a)}$ [b ಸಮ ಎಫ್ ಎಂದು ಓದಿರಿ] ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದರಿಂದ,

$$\mathbf{f = \{ (a, f (a) \mid a \in A \}}$$

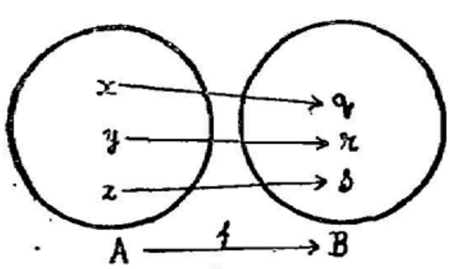
ಎಂಬುದನ್ನು ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡೋಣ. ಅಲ್ಲದೆ **A** ಗಣವನ್ನು **f**ಸಂಬಂಧಕದ **ಪ್ರದೇಶವೆಂದೂ** ಮತ್ತು B ಗಣವನ್ನು **ಸಹಪ್ರದೇಶ** ವೆಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇವರ ಜೊತೆಗೆ, ಸಂಕೇತದಲ್ಲಿ **f(A)**ಎಂದು ಬರೆಯುವ :

$$\mathbf{f(A)=\{b \in B \mid b=f (a),\ a \in A\}} \text{ ಎಂಬ}$$

B ಯ ಉಪಗಣವನ್ನು f ಸಂಬಂಧಕದ **ವ್ಯಾಪ್ತಿ**ಯೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. **f(a)**ಎಂಬುದನ್ನು **a ಎಂಬಲ್ಲಿ f ಸಂಬಂಧಕದ ಬೆಲೆ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

3·15 ಉದಾಹರಣೆಗಳು :

(i) $A=\{x, y, z\}$, $B=\{q, r, s\}$ ಎನ್ನೋಣ. $f : A \rightarrow B$ ಎಂಬ Aದಿಂದ Bಗೆ ಇರುವ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಚಿತ್ರ 3·15·1ರಲ್ಲಿ ನಿರೂಪಿಸಿದ್ದೇವೆ.



ಚಿತ್ರ: 3.15.1

ಇಲ್ಲಿ $(x, q) \in f$ ಎಂದರೆ qವು fನಲ್ಲಿ xದ ಪ್ರತಿಬಿಂಬ; qವು fದಲ್ಲಿ xದ ಪ್ರತಿಬಿಂಬ ಎಂದರೆ $q=f (x)$; $q=f (x)$ ಎಂದರೆ xಎಂಬಲ್ಲಿ fದ ಬೆಲೆ q ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ. ಆದ್ದರಿಂದ $(x,q) \in f$ ಎಂದರೆ $q=f (x)$; ಇದನ್ನು ಸಂಕೇತದಲ್ಲಿ

$$\mathbf{(x, q) \in f \rightleftarrows q=f(x)}$$

ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ ($\rightleftarrows$, ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು 'ಎಂದರೆ' ಎಂದು ಓದಿರಿ).

fದ ಪ್ರದೇಶ$=A$; fದ ವ್ಯಾಪ್ತಿ$=\{q, r, s\}$ ಮತ್ತು

fದ ಸಹಪ್ರದೇಶ$=B=\{q, r, s\}=$fದ ವ್ಯಾಪ್ತಿ.

(ii) $f : \{a, b, c, d\} \rightarrow \{b, c, d\}$ ಎನ್ನೋಣ ಮತ್ತು $f(a)=b$, $f(b)=c$, $f(c)=b$ ಮತ್ತು $f(d)=d$ ಎಂಬ ನಿಯೋಜನೆಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. ಈ ನಿಯೋಜನೆಗಳು $\{a, b, c, d\}$ ಗಣದಿಂದ $\{b, c, d\}$ ಗಣಕ್ಕೆ ಇರುವ f ಎಂಬ ಸಂಬಂಧಕವನ್ನು ನಿರ್ಣಯಿಸುತ್ತವೆ. ಇಲ್ಲಿ fದ ಪ್ರದೇಶ $=\{a, b, c, d\}$; fದ ಸಹಪ್ರದೇಶ $=\{b, c, d\}$ ಮತ್ತು fದ ವ್ಯಾಪ್ತಿ $\{b, c, d\}$

(iii) f ಎಂಬುದು ಭಾರತದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ರಾಜ್ಯಕ್ಕೂ ಅದರ ರಾಜಧಾನಿಯನ್ನು ನಿಯೋಜಿಸುತ್ತದೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಆಗ ಮೈಸೂರು ರಾಜ್ಯದ ಪ್ರತಿಬಿಂಬವು fದಲ್ಲಿ ಏನು ಎಂಬ ಪ್ರಶ್ನೆಗೆ ಉತ್ತರ– ಬೆಂಗಳೂರು ಅಥವಾ (ಮೈಸೂರು, ಬೆಂಗಳೂರು) $\in$ f. fದ ಪ್ರದೇಶ = ಭಾರತದ ಎಲ್ಲಾ ರಾಜ್ಯಗಳ ಗಣ; fದ ವ್ಯಾಪ್ತಿ = ಭಾರತದ ಎಲ್ಲಾ ರಾಜ್ಯಗಳ ರಾಜಧಾನಿಗಳ ಗಣ ಮತ್ತು fದ ಸಹಪ್ರದೇಶ = ಭಾರತದ ಎಲ್ಲಾ ನಗರಗಳ ಗಣ.

(iv) $f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ಎಂಬ ಸಂಬಂಧಕದ ನಿರೂಪಣೆ $f(x) = x^2$ ಆದರೆ, 2ರ ಪ್ರತಿಬಿಂಬ fದಲ್ಲಿ 4; fದ ಪ್ರದೇಶ $=\{1, 2, 3\}$; fದ ವ್ಯಾಪ್ತಿ $=\{1, 4, 9\}$ ಮತ್ತು fದ ಸಹಪ್ರದೇಶ $= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

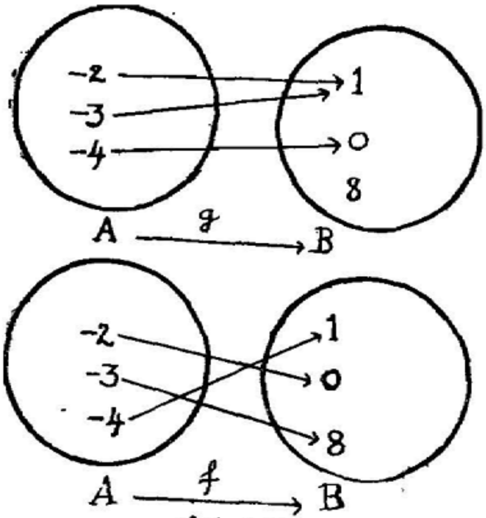
(v) $f : N \rightarrow N$ ಎಂಬ ಸಂಬಂಧಕವು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗೂ ಅದರ ಘನವನ್ನು (ಅಂದರೆ $a \in N$ಗೆ $a^3 \in N$) ನಿಯೋಜಿಸುತ್ತದೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಆಗ fದ ಪ್ರದೇಶ $=N=$ ಸಹಪ್ರದೇಶ ಮತ್ತು fದ ವ್ಯಾಪ್ತಿ $= \{1^3, 2^3, 3^3 \ldots\} \subset N$.

(vi) $f : R \rightarrow R$ ಎಂಬ ಸಂಬಂಧಕವು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗೂ ಅದರ ವರ್ಗವನ್ನು ನಿಯೋಜಿಸಿದರೆ, $f(-3)=9$; fದ ಪ್ರದೇಶ = ಸಹಪ್ರದೇಶ = R ಮತ್ತು fದ ವ್ಯಾಪ್ತಿ $=\{x | x \in R$ ಮತ್ತು $x \geqslant 0\}$.

3·16 ಟೀಕೆ : $f : A \rightarrow B$ ಎಂಬ Aದಿಂದ Bಗೆ ಇರುವ ಒಂದು ಸಂಬಂಧಕದಲ್ಲಿ fದ ವ್ಯಾಪ್ತಿ = fದ ಸಹಪ್ರದೇಶವಾದಾಗ f ಸಂಬಂಧಕವನ್ನು Aದಿಂದ Bಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ಸಂಬಂಧಕವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. fದ ವ್ಯಾಪ್ತಿ $\neq$ fದ ಸಹಪ್ರದೇಶವಾದಾಗ, f ಸಂಬಂಧಕವನ್ನು Aದಿಂದ Bಒಳಗಿರುವ ಒಂದು ಸಂಬಂಧಕವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾ : $A=\{-2, -3, -4\}$; $B=\{1, 0, 8\}$.

ಚಿತ್ರ 3·16.1ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ನಿಯೋಜನೆಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

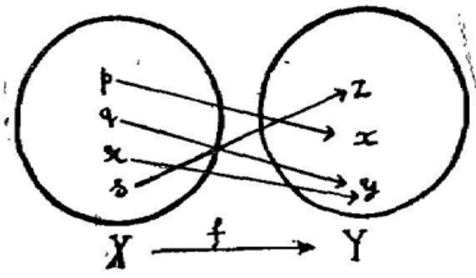


ಚಿತ್ರ: 3.16.1

ಇದರಲ್ಲಿ, (i) fದ ವ್ಯಾಪ್ತಿ $=\{1, 0, 8\}=$ fದ ಸಹಪ್ರದೇಶ ಇರುವದ ರಿಂದ, fವು Aದಿಂದ B ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ, (ii) gದ ವ್ಯಾಪ್ತಿ $=\{1, 0\} \neq \{1, 0, 8\}=$ gದ ಸಹಪ್ರದೇಶ ಇರುವುದ ರಿಂದ, gವು Aದಿಂದ Bಒಳಗಿರುವ ಒಂದು ಸಂಬಂಧಕವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

3·15 ರಲ್ಲಿಯ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ (i) ಮತ್ತು (ii)ರಲ್ಲಿರುವ ಲೆಕ್ಕಗಳು 'ಮೇಲಿನ' ಸಂಬಂಧಕಗಳನ್ನು ಮತ್ತು (iii) ರಿಂದ (iv)ರತನಕ ಇರುವ ಲೆಕ್ಕಗಳು 'ಒಳಗಿನ' ಸಂಬಂಧಕಗಳನ್ನು ಸೂಚಿ ಸುತ್ತವೆಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ,

3·17 ಉದಾ : (i) $X=\{p, q, r, s\}$, $y=\{z, x, y\}$ಎನ್ನೋಣ. ಆಗ ಚಿತ್ರ 3·17·1 ಸೂಚಿಸುವ ನಿಯೋಜನೆಗಳು, Xದಿಂದ Y ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ಸಂಬಂಧಕವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ.

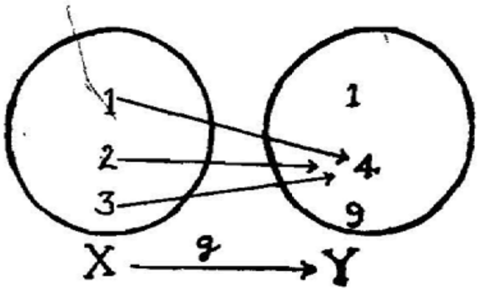


ಚಿತ್ರ: 3.17.1

ಈ ಸಂಬಂಧಕ f ಆದರೆ, $f=\{(p, x), (q, y), (r, y), (s, z)\}$.

(ii) $X=\{1, 2, 3\}$ ಮತ್ತು $Y=\{1, 4, 9\}$ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಚಿತ್ರ 3·17·2 ಸೂಚಿಸುವ ನಿಯೋಜ ನೆಗಳು gಎಂಬ ಒಂದು ಸಂಬಂಧಕವನ್ನು X ದಿಂದ Y ಒಳಗೆ ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

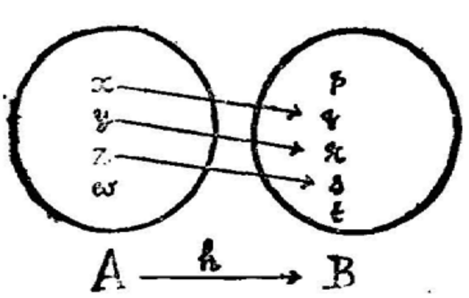
ಇಲ್ಲಿ $g=\{(1, 4), (2, 4), (3, 4)\} \subset X \times Y$ ದಲ್ಲಿ ಬರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗಣಾಂಶದ ಎರಡನೆಯ ಪದವು ಒಂದೇ ಸ್ಥಿರಸಂಖ್ಯೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ. ಹೀಗೆ ಯಾವುದೇಒಂದು ಸಂಬಂಧಕ $g : X \rightarrow Y$ ಎಂಬುದರ ನಿರೂಪಣೆ [$X \subset Y \subset R$ ಎನ್ನೋಣ]'



ಚಿತ್ರ: 3.17.2

$g = \{ (x, k) \mid x \in X,\ k \in Y$ ಮತ್ತು $k =$ ಸ್ಥಿರಸಂಖ್ಯೆ $\}$ ಆದಾಗ, ಮತ್ತು ಆದರೆ ಮಾತ್ರ, gಯನ್ನು ಸ್ಥಿರ ಸಂಬಂಧಕವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ. $g : R \rightarrow R$ ಮತ್ತು $g(x) = 0$ ಆದಾಗ. g ಎಂಬುದು ಒಂದು R ಗಣದ ಮೇಲಿನ ಸ್ಥಿರಸಂಬಂಧಕ. ಈ ಸಂಬಂಧಕದ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ಚಿತ್ರ $x-$ಅಕ್ಷವೆಂಬುದು ಸುಲಭವಾಗಿ ಗೊತ್ತಾಗುತ್ತದೆ.

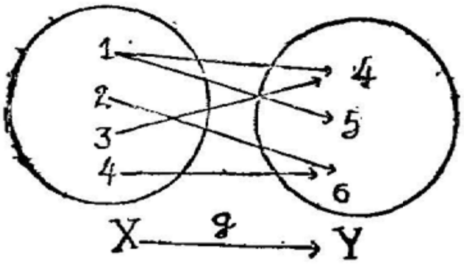
3.18 ಉದಾ : $A=\{x, y, z, w\}$ ಮತ್ತು $B=\{p, q, r, s, t\}$. $h \subset A \times B$ ಎಂಬ ಸಂಬಂಧದ ನಿರೂಪಣೆ ಚಿತ್ರ 3.18.1 ರಂತಿರಲಿ.



ಚಿತ್ರ: 3.18.1

ಇಲ್ಲಿ A ದಿಂದ Bಗೆ ಇರುವ ಯಾವ ಒಂದು ಸಂಬಂಧಕವನ್ನು h ಸಂಬಂಧವು ಸೂಚಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ, $w \in A$ ಆದಾಗ್ಯೂ ಸಹ ಇದರೊಡನೆ hಸಂಬಂಧವು Bಗಣದ ಯಾವ ಒಂದು ಗಣಾಂಶವನ್ನೂ ನಿಯೋಜಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಈಗ ಚಿತ್ರ 3.18.1ರಲ್ಲಿರುವ ನಿಯೋಜನೆಗಳ ಜೊತೆಗೆ $h(w)=t$ ಎಂಬ ಮತ್ತೊಂದು ನಿಯೋಜನೆಯನ್ನು ಮಾಡಿದರೆ ಆಗ $h : A \rightarrow B$ ಎಂಬುದು Aದಿಂದ Bಗೆ ಇರುವ ಒಂದು ಸಂಬಂಧಕವಾಗುತ್ತದೆ.

3.19 ಉದಾ : $X=\{1, 2, 3, 4\}$, $Y=\{4, 5, 6\}$ ಆಗಿರಲಿ, ಆಗ ಚಿತ್ರ 3.19.1ರಲ್ಲಿರುವ ನಿಯೋಜನೆಗಳು, Xದಿಂದ Yಗೆ ಇರುವ ಯಾವ ಒಂದು ಸಂಬಂಧಕವನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ, ಚಿತ್ರ 3.19.1ರಲ್ಲಿರುವ ಸಂಬಂಧವನ್ನು gಎಂದು ಕರೆದರೆ, $g(1) = 4 = 5$ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ. ಆದರೆ, X ಗಣದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗಣಾಂಶಕ್ಕೂ g ಸಂಬಂಧವು Yಗಣದ ಗಣಾಂಶವೊಂದನ್ನು ಏಕೈಕ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ನಿಯೋಜಿಸಿಲ್ಲ.

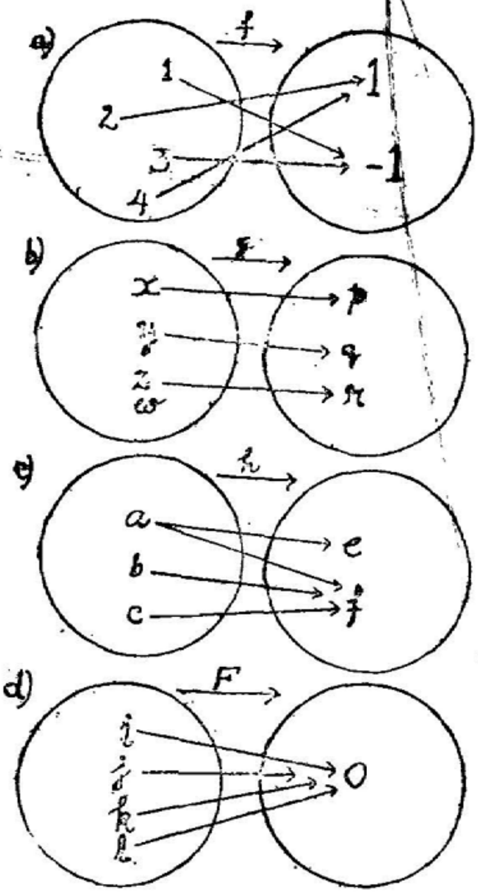


ಚಿತ್ರ: 3.19.1

ಈಗ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಸಂಬಂಧವು, ಒಂದು ಸಂಬಂಧಕವನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸುತ್ತದೆಯೇ ಇಲ್ಲವೇ ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಯಲು ಸಹಕಾರಿಯಾಗುವ ಟೀಕೆಯನ್ನು ನಿರೂಪಿಸುತ್ತೇವೆ :

3·20 ಟೀಕೆ: $A \neq \phi \neq B$ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. Aದಿಂದ Bಗೆ ಇರುವ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಸಂಬಂಧ fಕುರಿತು ವಿಚಾರಮಾಡೋಣ. ಈಗ $f \subset A \times B$ ಗಣದ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಗಣಾಂಶಗಳಲ್ಲಿ ಬರುವ ಎರಡನೆಯ ಪದಗಳು ಭಿನ್ನವಾದರೆ, ಮತ್ತು ಭಿನ್ನವಾದಾಗ ಮಾತ್ರ fಸಂಬಂಧವು Aದಿಂದ Bಗೆ ಇರುವ ಒಂದು ಸಂಬಂಧಕವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ; ಇಲ್ಲವಾದರೆ ಇಲ್ಲ ಎಂಬುವನ್ನು ಮನದಲ್ಲಿಡೋಣ. ಅರ್ಥಾತ್, f ಒಂದು ಸಂಬಂಧಕವಾದಾಗ, $(a, b) \in f$, $(a, c) \in f$ ಆ ಆ ಮಾತ್ರ $b = c$.

ಅಭ್ಯಾಸ 3·3

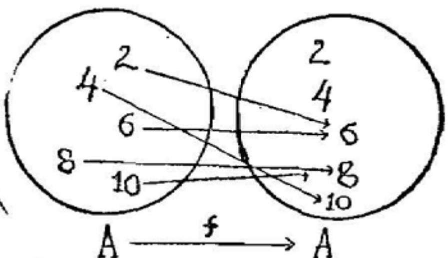


ಚಿತ್ರ: ಅ–3.3.1

1. ಸಂಬಂಧಕಗಳಿಗೆ ಎರಡು ದೈನಂದಿನ ಜೀವನದ ಘಟನೆಗಳನ್ನಾಧರಿಸಿದ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಕೊಡಿರಿ.

2. ಚಿತ್ರ ಅ–3·3·1ರಲ್ಲಿರುವ ನಿಯೋಜನೆಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುವು ಸಂಬಂಧಕಗಳನ್ನು ನಿಯೋಜಿಸುವವು ಎಂದು ನಿರ್ಧರಿಸಿರಿ.

3. $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ ಎಂಬ ಗಣದ ಮೇಲಿನ ಸಂಬಂಧಕ $f : A \rightarrow A$ ಅನ್ನು ಚಿತ್ರ ಅ–3·3·2 ನಿರ್ಣಯಿಸುತ್ತದೆ.



ಚಿತ್ರ: ಅ–3.3.2

(i) f ಸಂಬಂಧಕದ ಪ್ರದೇಶವನ್ನು ಮತ್ತು ಸಹಪ್ರದೇಶವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

(ii) fಸಂಬಂಧಕದ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

(iii) f ಸಂಬಂಧಕವನ್ನು ಕ್ರಮಯುಗ್ಮಗಳ ಗಣವಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿರಿ.

(iv) f ಸಂಬಂಧಕದ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

4. $A=\{p, q, r, s\}$, $B=\{l, m, n\}$ ಎನ್ನೋಣ. ಕೆಳಗೆ Aದಿಂದ Bಗೆ ಇರುವ ನಾಲ್ಕು ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವು Aದಿಂದ Bಗೆ ಇರುವ ಸಂಬಂಧಕಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಿದರೆ, ಅವುಗಳಾವುವು ?

(i) $E=\{(p, l), (q, m), (r, n), (s, l)\}$

(ii) $F=\{(p, l), (q, m), (r, n)\}$

(iii) $G=\{(p, l), (q, l), (r, l), (s, l)\}$

(iv) $H=\{(p, n), (q, l), (r, m), (s, l)\}$

5. ಮೇಲಿನ ಪ್ರಶ್ನೆ—4. (iii)ರಲ್ಲಿರುವ G ಗಣದ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ಚಿತ್ರವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

6. $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 16\}$ಎಂದಿರಲಿ.

(a) $f: A\rightarrow B$ ಎಂಬ ಸಂಬಂಧಕವು $f(x)=x^2$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ ನಿರ್ಣಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟರೆ, f ಸಂಬಂಧಕದ (i) ಪ್ರದೇಶ (ii) ಸಹಪ್ರದೇಶ ಮತ್ತು (iii) ವ್ಯಾಪ್ತಿಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ. 2ಮತ್ತು 4ರ ಪ್ರತಿಬಿಂಬಗಳನ್ನು fದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(b) $f: A\rightarrow B$ಎಂಬುದರ ನಿರೂಪಣೆ $f(x)=2x$ ಆದಾಗ fಸಂಬಂಧಕವನ್ನು ಕ್ರಮಯುಗ್ಮಗಳ ಗಣವಾಗಿ ಬರೆಯಿರಿ.

(c) $f\subset A\times B$ ಮತ್ತು afb ಆದರೆ, ಮತ್ತು ಆದಾಗ ಮಾತ್ರ $b=3a$ ಎನ್ನೋಣ. ಆಗ, f ಸಂಬಂಧವು Aದಿಂದ Bಗೆ ಇರುವ ಒಂದು ಸಂಬಂಧಕವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆಯೆ ? ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರವನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಿರಿ.

(d) $g\subset A\times B$ಎಂಬ ಉಪಗಣವು Aದಿಂದ Bಗೆ ಇರುವ ಒಂದು ಸಂಬಂಧಕವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವಂತೆ $f(x)=\ldots$ ಎಂಬುದನ್ನು ಪೂರ್ತಿಮಾಡಿರಿ.

3·21 ವ್ಯಾಖ್ಯೆ : ಸಂಬಂಧಕಗಳ ಸಮತ್ವ $f: A\rightarrow B$ ಮತ್ತು $g: A\rightarrow B$ಎಂಬ Aದಿಂದ Bಗೆ ಇರುವ ಎರಡು ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. A ಗಣದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗಣಾಂಶ aಗೂ $f(a)=g(a)$ ಆದರೆ, ಆಗ $f=g$ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.

3·22 ವ್ಯಾಖ್ಯೆ $f: A\rightarrow B$ ಎಂಬ Aದಿಂದ Bಗೆ ಇರುವ ಒಂದು ಸಂಬಂಧಕವನ್ನು [$A\subset B\subset R$ ಎಂದಿರಲಿ],

$$f=\{(a, f(a)) \mid a\in A\}$$

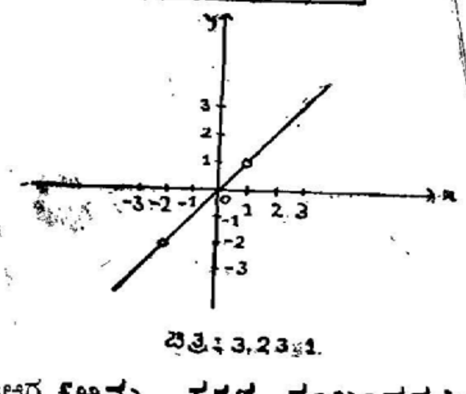
ಎಂಬ ಕ್ರಮಯುಗ್ಮಗಳ ಗಣ ನಿರೂಪಿಸುತ್ತದೆಂದು ಆಗಲೇ ಕಂಡಿದ್ದೇವೆ. ಈಗ (a, f(a)) ಎಂಬ ಕ್ರಮಯುಗ್ಮವು ಸಮತಳದ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟಬಿಂದುವನ್ನುಗುರ್ತಿಸುತ್ತದೆ [3.2 ಪ್ರಮೇಯ ನೋಡಿರಿ]. ಹೀಗೆ **f ಗುರ್ತಿಸುವ ಎಲ್ಲಾ ಕ್ರಮಯುಗ್ಮಗಳ (ಬಿಂದುಗಳ) ಸಮುದಾಯವನ್ನು f ಸಂಬಂಧಕದ ನಕ್ಷೆಯೆಂದು** ಒಪ್ಪಿಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ.

3.23 ಉದಾ : f : R→R ಎಂಬ ಸಂಬಂಧಕವನ್ನು f (x)=x ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವು ನಿರ್ಣಯಿಸಲಿ. f ಸಂಬಂಧಕದ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಈಗ ರಚಿಸೋಣ:

$$f=\{(x, f(x)) \mid x\in R \text{ ಮತ್ತು } f(x)=x\}\subset R\times R$$

f ಗಣದ ಗಣಾಂಶಗಳೆಲ್ಲವೂ ಗುರ್ತಿಸುವ ಎಲ್ಲಾ ಬಿಂದುಗಳ ಸಮುದಾಯವೇ ದತ್ತ ಸಂಬಂಧಕದ ನಕ್ಷೆಯೆಂದು ಒಪ್ಪಿಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, x ಗೆ ಕೆಲವು ಸೂಕ್ತವಾದ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟು ತನ್ಮೂಲಕ f ಸಂಬಂಧಕದ ಮೇಲಿರುವ ಹಲವು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ. ಈ ಬಿಂದುಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ f ದ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ರಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಈ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಚಿತ್ರ 3.23.1 ರಲ್ಲಿ ಕಾಣಬಹುದು.

x	0	1	-2
f(x)	0	1	-2



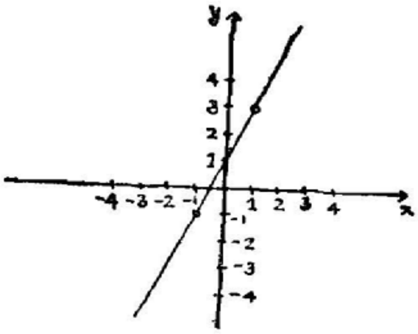
ಚಿತ್ರ 3.23.1.

ಇಲ್ಲಿ f (x)=x ಇರುವುದರಿಂದ (o, o), (1, 1), (−2,2) ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳು ದತ್ತ ಸಂಬಂಧಕದ ನಕ್ಷೆಯ ಮೇಲಿರುವ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿವೆ. ಇದರಿಂದ ಮೇಲಿನ ಚಿತ್ರವನ್ನು ರಚಿಸಿದ್ದೇವೆ.

3.24 ವ್ಯಾಖ್ಯೆ : f R→R ಎಂಬ ಸಂಬಂಧಕವನ್ನು $f(x)=ax+b$ [a, b ∈ R, a ≠ o] ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವು ನಿರೂಪಿಸಿದರೆ, ಆಗ **f ಅನ್ನು ಸರಳ ಸಂಬಂಧಕ**ವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು $y=ax+b$ ಎಂದೂ ಸೂಚಿಸುವ ಪದ್ಧತಿಯೂ ರೂಢಿಯಲ್ಲಿದೆ.

3.25 ವ್ಯಾಖ್ಯೆ : f: R → R ಎಂಬ ಸಂಬಂಧಕದ ನಿರೂಪಣೆ $y=f(x) = ax^2+bx+c$ [a ≠ o, a, b, c ∈ R], ಆದಾಗ, **f ಸಂಬಂಧಕವನ್ನು ವರ್ಗ ಸಂಬಂಧಕ**ವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

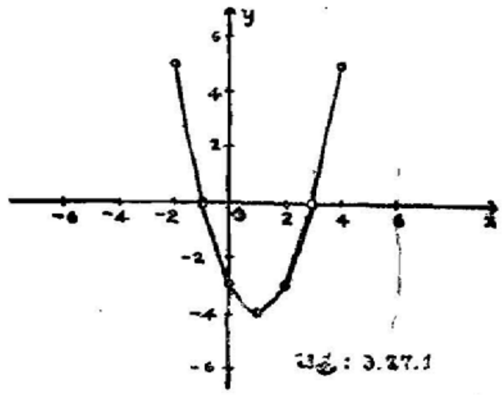
3.26 ಉದಾ : $y=2x+1$ ಎಂಬ ಸರಳ ಸಂಬಂಧಕದ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಬರೆಯೋಣ. ಇದಕ್ಕೆ, ಈ ನಕ್ಷೆಯ ಮೇಲಿರುವ ಕೆಲವು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಮೊದಲು ಪಡೆಯೋಣ.



ಚಿತ್ರ: 3.26.1

$x=1$ ಆದಾಗ, $y=2\cdot1+1=3$,
$x=0$ ಆದಾಗ, $y=2\cdot0+1=1$,
$x=-1$ ಆದಾಗ, $y=2\cdot-1+1=-1$
ಆದ್ದರಿಂದ $(1,3)$, $(0,1)$ ಮತ್ತು $(-1,1)$ ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳು ದತ್ತ ಸಂಬಂಧಕದ ನಕ್ಷೆಯ ಮೇಲಿವೆ. ಇದರ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಚಿತ್ರ: 3·26·1ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿದ್ದೇವೆ.

3·27 ಉದಾ: $y=x^2-2x-3$ ಎಂಬ ವರ್ಗ ಸಂಬಂಧಕದ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ರಚಿಸೋಣ. ಈ ಸಂಬಂಧಕದ ಹಲವು ಬಿಂದುಗಳ x ಮತ್ತು y ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಮುಂದಿನ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ; ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಚಿತ್ರ 3·27·1ರಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ: 3.27.1

x	−1	0	1	−2	2	−3	+4	5	3
y	0	−3	−4	5	−3	12	5	12	0

ಅಭ್ಯಾಸ 3·4

ಸೂಚನೆ: ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಂಬಂಧಕಗಳ ನಕ್ಷೆಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

1. $3x+2y=0$
2. $x=y$
3. $\frac{x}{-2}+\frac{y}{-4}=0$
4. $3x-4y+5=0$
5. $y=-\frac{1}{2}x+7$
6. $y=2x^2-5x+2$
7. $y=-2x^2+5x+6$
8. $y=x^2+3x+4$
9. $y^2=8x$
10. $y^2=4ax\ (a>0)$
11. $y=-3x^2+2x-1$

4

ಘಾತಾಂಕಗಳು

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಬರುವ N, F ಮತ್ತು R ಎಂಬ ಅಕ್ಷರಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ **ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ, ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ** ಮತ್ತು **ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣ**ಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆಂಬುದನ್ನು ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡೋಣ.

4·1 ವ್ಯಾಖ್ಯೆ : $n \in N$ ಮತ್ತು $a \in R$ ಆದಾಗ a^n ಎಂಬ ಸಂಕೇತಕ್ಕೆ

$$a^n = a \times a \times a \times \ldots \; n \text{ ಅಪವರ್ತನಗಳು} \quad (4{\cdot}1{\cdot}1)$$

ಎಂಬ ಅರ್ಥವನ್ನು ಕೊಡುತ್ತೇವೆ, ಮತ್ತು ಈ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು **a**ಯ **n**ನೇ ಘಾತ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ **n** ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಈ ಘಾತದ ಘಾತಾಂಕವೆಂದೂ, ಮತ್ತು **a**ಯನ್ನು ಆಧಾರವೆಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

4·2 ಉದಾ : $4^5 = 1024$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ, $1024 = 4$ರ 5ನೇ ಘಾತ; $4 =$ ಆಧಾರ ಮತ್ತು $5 =$ ಘಾತಾಂಕವೆಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ.

4·3 ಘಾತಾಂಕ ನಿಯಮಗಳು : $m, n \in N$ ಮತ್ತು $0 \neq a \in R$ ಎನ್ನೋಣ. ಆಗ m, nಗಳು ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಘಾತಾಂಕ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಪಾಲಿಸುತ್ತವೆ.

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \qquad (4{\cdot}3{\cdot}1)$$

$$\frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n}, & m > n \\ 1, & m = n \\ \dfrac{1}{a^{n-m}}, & m < n \end{cases} \qquad (4{\cdot}3{\cdot}2)$$

$$(a^m)^n = a^{mn} \qquad (4{\cdot}3{\cdot}3)$$

$$(ab)^m = a^m \cdot b^m \qquad (4\cdot3\cdot4)$$

ಸಾಧನೆ : (4·3·1)ಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ :

$$a^m \times a^n = (a \times a \times a \ldots m \text{ ಅಪವರ್ತನಗಳು}) \times (a \times a \times a \times a \ldots n \text{ ಅಪವರ್ತನಗಳು})$$
$$= (a \times a \times a \cdots \overline{m+n} \text{ ಅಪವರ್ತನಗಳು})$$
$$= a^{m+n} \qquad [(4\cdot1\cdot1)\text{ರಿಂದ}]$$

(4·3·2)ಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a \times a \times a \times a \times \ldots m \text{ ಅಪವರ್ತನಗಳು}}{a \times a \times a \ldots n \text{ ಅಪವರ್ತನಗಳು}}$$

$m > n$ ಆದಾಗ, ಅಂಶದಲ್ಲಿ $m = n + (m-n)$ aಗಳಿರುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಛೇದದಲ್ಲಿರುವ n aಗಳೊಡನೆ ಅಂಶದಲ್ಲಿರುವ n aಗಳು ಭಾಗವಾದನಂತರ, ಅಂಶ ದಲ್ಲಿ $(m-n)$ aಗಳು ಉಳಿಯುತ್ತವೆ; ಛೇದದಲ್ಲಿ 1 ಉಳಿಯುತ್ತದೆ.

$$\therefore \quad \frac{a^m}{a^n} = \frac{a \times a \times a \times \cdots (m-n) \text{ ಅಪವರ್ತನಗಳು}}{1} \quad (m > n)$$

$$= a^{m-n}$$

$m = n$ ಆದಾಗ, $\dfrac{a^m}{a^n} = \dfrac{a^n}{a^n} = 1$

$m < n$ ಆದಾಗ ಅಂಶದಲ್ಲಿರುವ m aಗಳು ಛೇದದಲ್ಲಿರುವ m aಗಳೊಡನೆ ಭಾಗವಾಗಿ, ಅಂಶದಲ್ಲಿ 1 ಮತ್ತು ಛೇದದಲ್ಲಿ $(n-m)$ aಗಳು ಉಳಿಯುತ್ತವೆ. [ಏಕೆ?]

$$\therefore \quad \frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}} \qquad [n > m].$$

(4·3·3)ಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ

$$(a^m)^n = a^m \times a^m \times a^m \times \cdots n \text{ ಅಪವರ್ತನಗಳು}$$
$$= a^{m+m+m+\cdots n\text{ಪದಗಳು}} \qquad [\text{ಅ}-4\cdot1\cdot2\text{ರಿಂದ}]$$
$$= a^{mn}$$

(4·3·4)ಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ :

$(a\ b)^m = (a\ b)\ (a\ b)\ (a\ b) \ldots m$ ಆವರಣಗಳು

$= (a \cdot a \cdot a \ldots m$ ಅಪವರ್ತನಗಳು$)\ (b \cdot b \cdot b \ldots$ m ಅಪವರ್ತನಗಳು$)$ [ಏಕೆ?]

$= a^m \cdot b^m$

4.4 ಉದಾ : ಸುಲಭರೂಪಕ್ಕೆ ತರೋಣ.

$$\frac{(2^2)^3 \times 3^{12} \times (6\times 2)^4}{(2\times 7)^7 \times 9^8}$$

ದತ್ತ ಲೆಕ್ಕ $= \dfrac{2^{2\times 3}\times 3^{12}\times(3\times 2\times 2)^4}{2^7\times 7^7\times(3\times 3)^8}$ [(4·3·3)ರಿಂದ]

$= \dfrac{2^6\times 3^{12}\times 3^4\times 2^4\times 2^4}{2^7\times 7^7\times 3^8\times 3^8}$ [ಅ-4·1·2ರಿಂದ

$= \dfrac{2^{6+4+4}\times 3^{12+4}}{2^7\times 7^7\times 3^{8+8}}$ [ಏಕೆ?]

$= \dfrac{2^{14}\times 3^{16}}{2^7\times 7^7\times 3^{16}}$

$= \dfrac{2^{14}}{2^7}\times\dfrac{1}{7^7} = \dfrac{2^{14-7}}{7^7} = \dfrac{2^7}{7^7}$

ಅಭ್ಯಾಸ 4·1

1. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ ಘಾತ, ಘಾತಾಂಕ ಮತ್ತು ಆಧಾರಗಳನ್ನು ವಿಂಗಡಿಸಿರಿ.

$2^3=8$; $10^2=100$; $5^5=3125$; $a^4=b$; $a^x=n$.

2. $m, n, p, q, \ldots \in N$ ಮತ್ತು $a, b, c, \ldots \in R$ ಆದಾ

(i) $a^m \times a^n \times a^p \ldots = a^{m+n+p+\ldots}$ ಮತ್ತುಗ

$$\text{(ii)}\ (a^m \times b^n \times c^p \times \cdots)^q$$

$$= a^{mq} \times b^{nq} \times c^{pq} \times \cdots$$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

ಇವುಗಳನ್ನು ಸುಲಭರೂಪಕ್ಕೆ ತನ್ನಿರಿ.

$$\text{(i)}\quad \frac{(2^4)^2 \times (3^4)^2 \times (42)^5}{(3 \times 7)^5 \times (2^3 \times 3)^2 \times [(2^2 \times 3)^2]^2}$$

$$\text{(ii)}\quad \frac{(p^l)^l \times (p^m)^m}{(p^m)^l \times (p^l)^m} \div \left(\frac{p^n}{p^l\, p^m}\right)^n$$

---

5 ಘಾತದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ ನಿರೂಪಿಸುವಾಗ ಘಾತಾಂಕವನ್ನು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕವೆಂದು ಭಾವಿಸಿದ್ದುದು ನೆನಪಿದೆಯಷ್ಟೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಘಾತಾಂಕ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಲ್ಲದ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ, ಘಾತದ ನಿರೂಪಣೆ ಹೇಗೆ ಎಂಬ ಪ್ರಶ್ನೆ ಮೂಡುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ, a^0, a^{-2}, $a^{\frac{1}{2}}$ ಮೊದಲಾದ ಸಂಕೇತಗಳ ಬೆಲೆ ಪಡೆಯಲು ಘಾತದ ವ್ಯಾಖ್ಯೆ ನಮಗೆ ಸಹಕಾರಿಯಾಗುವುದಿಲ್ಲ [ಏಕೆ?]. ಆದರೆ ಈ ಸಂಕೇತಗಳನ್ನು ಬಿಟ್ಟರೆ ಬೀಜಗಣಿತದ ವಿಸ್ತರಣೆ ಕುಂಠಿತಗೊಳುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಬೀಜಗಣಿತದ ವಿಸ್ತರಣ ಪ್ರಕೃತಿಗೆ ತಕ್ಕಂತೆ a^m ನಲ್ಲಿ $m \in F$ ಆದಾಗಲೂ ಸಹ ಘಾತಾಂಕ ನಿಯಮಗಳು ಯುಕ್ತವಾಗುವಂತೆ, ಘಾತದ ಅರ್ಥವನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸಬೇಕಾದ ಸಂದರ್ಭ ಈಗ ಒದಗಿದೆ, ಇದನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು,

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \tag{4·3·1}$$

ನಿಯಮವು $m, n \in F$ ಆದಾಗ್ಯೂ ಸಹ ಯುಕ್ತವಾಗುತ್ತದೆಂದು ಭಾವಿಸುತ್ತೇವೆ.

(i) $n = 0$ ಎಂದು (4·3·1)ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸೋಣ.

$$a^m \times a^0 = a^{m+0} = a^m$$

$$\therefore \quad \frac{a^m \times a^0}{a^m} = \frac{a^m}{a^m}$$

ಆಗ, $a \neq 0$ ಆದರೆ $a^0 = 1$.

ಆದ್ದರಿಂದ $a \neq 0$ ಆದಾಗ, $\underline{a^0 = 1}$ ಎಂದು ಒಪ್ಪಿಕೊಳ್ಳೋಣ.

(ii) (4·3·1)ರಲ್ಲಿ $m = -n$ ಆದೇಶಿಸೋಣ.

$$a^{-n} \times a^n = a^{-n+n}$$

$$= a^{0}$$
$$= 1 \ (a \neq 0 \text{ ಆದಾಗ})$$

$$\therefore \quad \frac{a^{-n} \times a^{n}}{a^{n}} = \frac{1}{a^{n}}$$

$$\therefore \quad a^{-n} = \frac{1}{a^{n}}$$ (a ≠ o ಆದಾಗ) ಎಂದು ಒಪ್ಪಿಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ.

4·6 ಟೀಕೆ : $n \in N$ ಮತ್ತು $a^n = W$ ಆದಾಗ aಯು Wನ nನೆಯ ಮೂಲ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇವನ್ನು ಸಂಕೇತದಲ್ಲಿ $a = \sqrt[n]{W}$ ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

4·7 ಉದಾ : (i) $4^4 = 64 \quad \therefore \quad 4 = \sqrt[3]{64}$

(ii) $10^4 = 10{,}000 \rightleftarrows 10 = \sqrt[4]{10000}$

(iii) $5^2 = 25 \rightleftarrows 5 = \sqrt{25} = 25$ರ ವರ್ಗಮೂಲ.

4·8 $m \in F$ ಆದಾಗ a^m ಘಾತಾದ ಅರ್ಥ ವಿವರಣೆ :

$m = \frac{p}{q}$, p, $q \in N$ ಎನ್ನೋಣ.

ಈಗ $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{q} = a^{\frac{p}{q}} \times a^{\frac{p}{q}} \times a^{\frac{p}{q}} \times \cdots$ q ಅಪವರ್ತನಗಳು [ಏಕೆ?]

$$= a^{\frac{p}{q} + \frac{p}{q} + \frac{p}{q} + \cdots \text{ q ಪದಗಳು}}$$

$$= a^{\frac{p}{q} \times q} = a^{p}$$

$\therefore \quad a^{\frac{p}{q}}$ ಸಂಖ್ಯೆಯ qನೇ ಘಾತವು a^p ಆಗಿದೆ.

$$\therefore \quad a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^{p}}$$ [4·6 ಟೀಕೆಯಿಂದ]

ಅಂದರೆ $a^{\frac{p}{q}} = a^p$ ದ qನೇ ಘನಮೂಲವೆಂದು ಒಪ್ಪಿಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ.

4·9 $m, n \in F$ ಆದಾಗ ಘಾತಾಂಕ ನಿಯಂಗಳ ಸಾಧನೆ : $m, n \in N$ ಆದಾಗ ಘಾತಾಂಕ ನಿಯಮಗಳು [(4.3·1) ರಿಂದ (4·3·4)ರ ವರೆಗೆ] ಯುಕ್ತವಾಗುತ್ತವೆಂಬುದನ್ನು ಆಗಲೇ ಕಂಡಿದ್ದೇವೆ. ಈಗ $m, n \in F$ ಆದಾಗ (4·3·1) ನಿಯಮವು, ಅಂದರೆ

$$a^i \times a^j = a^{i+j} \quad \ldots \qquad (4\cdot9\cdot1)$$

ಎಂಬುದು ಯುಕ್ತವಾಗುತ್ತದೆಂದು ಭಾವಿಸಿ, ಉಳಿದ ನಿಯಮಗಳು [(4·3·2), (4·3·3) ಮತ್ತು (4·3·4) $m, n \in F$ ಆದಾಗ್ಯೂ ಸಹ ಯುಕ್ತವಾಗುತ್ತವೆಂದ ಸಾಧಿಸುತ್ತೇವೆ.

(i) **(4·3·2)ರ ಸಾಧನೆ :** $m, n \in F \rightarrow m-n \in F$ [ಅ–2·2·5] ನೋಡಿರಿ]. ಆದ್ದರಿಂದ [4·9·1]ರಲ್ಲಿ $i = m - n, j = n$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸೋಣ. ಇದರಿಂದ :

$$a^{m-n} \times a^n = a^{m-n+n} \text{ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.}$$

$$\therefore \quad \frac{a^{m-n} \times a^n}{a^n} = \frac{a^m}{a^n}$$

$$\therefore \quad a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$$

(ii) **(4·3·3)ರ ಸಾಧನೆ :** (a) m, nಗಳು ಧನಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. $p, q, r, s \in N$ ಇರುವಾಗ $m = \frac{p}{q}$, $n = \frac{r}{s}$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು [ಏಕೆ?].

$$\text{ಎಡಬದಿ} = (a^m)^n$$

$$= \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} = x \text{ ಎನ್ನೋಣ.}$$

$$\therefore \ x^s = \left\{\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}}\right\}^s$$

$$= \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} \times \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} \times \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} \times \ldots s \text{ ಅಪವರ್ತನಗಳು.}$$

$$= \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s} + \frac{r}{s} + \frac{r}{s} + \ldots s \text{ ಪದಗಳು}} \text{ [ಏಕೆ?]}$$

$$= \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s} \times s} = \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{r}$$

$$\therefore\ x^s = a^{\frac{pr}{q}} \quad \ldots \quad (4\cdot9\cdot2)$$

ಈಗ ಬಲಬದಿ $= a^{mn} = a^{\frac{p}{q} \times \frac{r}{s}} = y$, ಎನ್ನೋಣ.

$$\therefore\ y^s = \left(a^{\frac{pr}{qs}}\right)^{s}$$

$$= a^{\frac{pr}{qs}} \times a^{\frac{pr}{qs}} \times a^{\frac{pr}{qs}} \ldots \text{ s ಅಪವರ್ತನಗಳು.}$$

$$= a^{\frac{pr}{qs} + \frac{pr}{qs} + \frac{pr}{qs} + \ldots \text{s ಪದಗಳು}}$$

$$= a^{\frac{pr}{qs} \times s}$$

$$\therefore\ y^s = a^{\frac{pr}{q}} \quad \ldots \quad (4\cdot9\cdot3)$$

(4 9·2) ಮತ್ತು (4·9·3)ರ ಬಲಬದಿಗಳು ಒಂದೇ ಇರುವುದರಿಂದ ಎಡಬದಿಗಳನ್ನು ಸಮಗೊಳಿಸಬಹುದು.

$$\therefore\ x^s = y^s \rightleftarrows x = y$$

ಅಂದರೆ $(a^m)^n = a^{mn}$.

(b) ಈಗ $r \in F$ ಮತ್ತು $r > o$ ಎನ್ನೋಣ. $n = -r$ ಎಂಬುದು ಒಂದು ಋಣಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಎಡಬದಿ $= (a^m)^n = (a^m)^{-r}$

$$= \frac{1}{(a^m)^r} \quad \ldots \quad [4\cdot5\cdot(ii)\text{ರಿಂದ}]$$

$$= \frac{1}{a^{mr}}$$

$$= a^{-mr} = a^{m \times -r} = a^{m \times n} =$$ ಬಲಬದಿ.

(iii) (4·3·4)ರ ಸಾಧನೆ : (a) m ಒಂದು ಧನಸಂಖ್ಯೆಯೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ.

ಆಗ $p, q \in N$ ಇರುವಾಗ, $m = \frac{p}{q}$ ಎಂದು ಬರೆಬಹುದು.

ಎಡಬದಿ $= (ab)^m = (ab)^{\frac{p}{q}} = x$, ಎನ್ನೋಣ.

$$\therefore \quad x^q = \left\{ (ab)^{\frac{p}{q}} \right\}^q$$

$$= (ab)^{\frac{p}{q}} \times (ab)^{\frac{p}{q}} \times \cdots q$$ ಅಪವರ್ತನಗಳು.

$$= (ab)^{\frac{p}{q} + \frac{p}{q} + \cdots q \text{ ಪದಗಳು}}$$

$$= (ab)^{\frac{p}{q} \times q} = (ab)^p$$

$$\therefore \quad x^q = a^p\, b^p \quad \ldots \quad (4{\cdot}9{\cdot}4)$$

ಬಲಬದಿ $= a^{\frac{p}{q}}\, b^{\frac{p}{q}} = y$, ಎನ್ನೋಣ.

$$\therefore \quad y^q = \left(a^{\frac{p}{q}}\, b^{\frac{p}{p}} \right)^q$$

$$= \left(a^{\frac{p}{q}}\, b^{\frac{p}{q}} \right) \left(a^{\frac{p}{q}}\, b^{\frac{p}{q}} \right) \ldots$$ q ಆವರಣಗಳು.

$$= \left(a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{p}{q}} \ldots q \text{ ಅಪವರ್ತನಗಳು} \right) \left(b^{\frac{p}{q}} \cdot b^{\frac{p}{q}} \ldots q \text{ ಅಪವರ್ತನಗಳು} \right)$$

$$= \left(a^{\frac{p}{q}} \right)^q \left(b^{\frac{p}{q}} \right)^q = a^{\frac{p}{q} \cdot q} \times b^{\frac{p}{q} \cdot q}$$

$\therefore \quad y^q = a^p b^p$ . . . . (4.9.5)

(4.9.4) ಮತ್ತು (4.9.5.) ರಿಂದ $x^q = y^q = a^p b^p$

$\therefore \quad x = y$, ಅಂದರೆ $(ab)^m = a^m b^m$

(b) ಈಗ m ಒಂದು ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ, $m = -r$, ಇಲ್ಲಿ $r \in F$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಎಡಬದಿ $(ab)^m = (ab)^{-r}$

$= \frac{1}{(ab)^r}$ . . . [ಏಕೆ ?]

$= \frac{1}{a^r b^r}$

$= a^{-r}b^{-r} = a^m b^m =$ ಬಲಬದಿ

4.10 ಅನುಮಿತ : $m \in F$ ಆದಾಗ $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸುತ್ತೇವೆ

ಎಡಬದಿ $= \left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(ab^{-1}\right)^m = a^m b^{-m}$ [ಏಕೆ ?]

$= \frac{a^m}{b^m} =$ ಬಲಬದಿ.

4.11 ಟೀಕೆ : 4.9 ರಲ್ಲಿ ಸಾಧಿಸಿರುವ ಘಾತಾಂಕ ನಿಯಮಗಳೆಲ್ಲವೂ $m, n \in R$ ಆದಾಗ ಯುಕ್ತವಾಗುತ್ತವೆಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ. ಈ ವಿಷಯವು ಪ್ರಸ್ತುತ ಪುಸ್ತಕದ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯ ಹೊರಗೆ ಬರುವುದರಿಂದ ಅದನ್ನು ಸೇರಿಸಿಲ್ಲ.

4.12 ಉದಾ : (i) ಇವೆರಡರಲ್ಲಿ ಯಾವುದು ದೊಡ್ಡದು $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ ಅಥವಾ $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$?

ಈಗ $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}}$. [4.10 ಅನುಮಿತದಿಂದ]

$= \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2^{\frac{3}{6}}} = \frac{1}{\sqrt[6]{2^3}}$ [4.8 ರಿಂದ]

$$\therefore \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt[6]{8}}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt[6]{\left(\frac{4}{9}\right)} = \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{6}}$$

$$= \left(1/\tfrac{9}{4}\right)^{\frac{1}{6}} = \frac{1^{\frac{1}{6}}}{\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{6}}} = \frac{1}{\sqrt[6]{\frac{9}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[6]{2\frac{1}{4}}}$$

ಆದರೆ $2\frac{1}{4} < 8$ ಅಥವಾ $\sqrt[6]{2\frac{1}{4}} < \sqrt[6]{8}$

ಅಂದರೆ $\dfrac{1}{\sqrt[6]{2\frac{1}{4}}} > \dfrac{1}{\sqrt[6]{8}}$ . . . [ಏಕೆ ?]

$$\therefore \quad \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}} > \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

(ii) $\left(\dfrac{x^{-\frac{1}{2}}\ a^{-\frac{1}{9}}}{y^{-\frac{1}{3}}\ b^{\frac{2}{9}}}\right)^{-1} \times \left(\dfrac{x^{\frac{1}{2}}\ a^{-\frac{2}{3}}}{x^{-\frac{1}{4}}\ b^{\frac{1}{3}}}\right)^{2}$ ಎಂಬುದನ್ನು ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸೋಣ.

$= A \times B$ ಎಂದಿಟ್ಟರೆ, ಇಲ್ಲಿ

$$A = \left(\frac{x^{-\frac{1}{2}}\ a^{-\frac{1}{9}}}{y^{-\frac{1}{3}}\ b^{-\frac{2}{9}}}\right)^{-1}$$

$$= \frac{\left(x^{-\frac{1}{2}} \cdot a^{-\frac{1}{9}}\right)^{-1}}{\left(y^{-\frac{1}{3}}\ b^{-\frac{2}{9}}\right)} \quad . \quad . \quad [\text{ 4.10 ಅನುಮಿತದಿಂದ }]$$

$$= \frac{x^{-\frac{1}{2}\times -1}\ a^{-\frac{1}{9}\times -1}}{y^{-\frac{1}{3}\times -1}\ b^{\frac{2}{9}\times -1}} \quad . \quad . \quad . \quad [\text{ (4.3.4) ರಿಂದ }]$$

$$= \frac{x^{\frac{1}{2}}\quad a^{\frac{1}{9}}}{y^{\frac{1}{3}}\quad b^{-\frac{2}{9}}}$$ ಮತ್ತು

$$B = \frac{\left(y^{\frac{1}{2}}\right)^2\left(a^{-\frac{2}{3}}\right)^2}{\left(x^{\frac{1}{4}}\right)^2\left(b^{\frac{1}{3}}\right)^2} \quad . \quad . \quad . \quad [\text{ಏಕೆ ?}]$$

$$= \frac{y^1 a^{-\frac{4}{3}}}{x^{\frac{1}{2}} b^{\frac{2}{3}}}$$

$$\therefore \text{ ದತ್ತಲಬ್ಧ} = A \times B = \frac{x^{\frac{1}{2}}\ a^{\frac{1}{9}}}{y^{\frac{1}{3}}\ b^{-\frac{2}{9}}} \times \frac{y\ a^{-\frac{4}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}\ b^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{x^{\frac{1}{2}}\ a^{\frac{1}{9}-\frac{4}{3}}\ y}{x^{\frac{1}{2}}\ b^{-\frac{2}{9}+\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}}}$$

$$= \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} \times \frac{a^{-\frac{11}{9}}}{b^{\frac{4}{9}}} \times \frac{y}{y^{\frac{1}{3}}}$$

$$= 1 \times \frac{1}{a^{\frac{11}{9}}\ b^{\frac{4}{9}}} \times y^{1-\frac{1}{3}} = \frac{y^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{11}{9}}\ b^{\frac{4}{9}}}$$

(iii) $x = y^x$ ಮತ್ತು $y = x^y$ ಆದಾಗ, $x^2 y^3 = (x^a y^b)^7$ ಆದರೆ, y ಬೆಲೆಯನ್ನು a ಮತ್ತು b ಗಳಲ್ಲಿ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯೋಣ.

$$x^2 y^3 = (x^a y^b)^7 \quad . \quad . \quad . \quad [\text{ದತ್ತ}]$$

ಇಲ್ಲಿ ಎರಡು ಬದಿಯನ್ನೂ ಆಧಾರ xನಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸೋಣ.

$$\text{ಎಡಬದಿ} = x^2 y^3 = x^2 (x^y)^3 \quad . \quad . \quad . \quad [\text{ದತ್ತ}]$$

$$= x^2 . x^{y3} = x^{2+3y}$$

$$\text{ಬಲಬದಿ} = (x^a y^b)^7 = x^{7a} . y^{7b}$$

$$= x^{7a} (y)^{7b}$$

$$= x^{7a} (x^y)^{7b} = x^{7a} . x^{7yb}$$

$$= x^{7a+7yb}$$

$$\therefore \quad x^{2+3y} = x^{7a+7yb}$$

ಇದರಲ್ಲಿ ಎರಡು ಬದಿಯೂ ಆಧಾರ ಒಂದೇ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಸಹಗಾಮಿ ಘಾತಾಂಕಗಳನ್ನು ಸಮಗೊಳಿಸಬಹುದು.

$$\therefore \quad 2 + 3y = 7a + 7by$$

$$\therefore \quad 3y - 7by = 7a - 2$$

$$y(3 - 7b) = 7a - 2)$$

$$\therefore \quad y = \frac{7a - 2}{3 - 7b}$$

—

ಅಭ್ಯಾಸ 4.2

1. ಇವುಗಳನ್ನು ಸುಲಭ ರೂಪಕ್ಕೆ ತಂದು ಘಾತಾಂಕಗಳು ಧನಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುವಂತೆ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿರಿ.

(i) $3a^2 b^3 c^4 \times a^{-3} b^{-4} c^{-2}$

(ii) $x^{\frac{2}{3}} y^{-\frac{5}{6}} z^{\frac{7}{8}} \times x^{-\frac{1}{4}} y^{-\frac{2}{3}} z^{-\frac{1}{8}}$

(iii) $\sqrt[5]{\{a^{-4} b^5 c^6\}}$

(iv) $\left(a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}}\right)^2$

(v) $\left\{\sqrt[3]{ab^{-1}} \times \sqrt[4]{ba^{-1}}\right\}^{\frac{1}{12}}$

2. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದು ಮತ್ತು ಎಷ್ಟು ದೊಡ್ಡದು ?

$(2^3)^2$ ಎಂಬುದೇ ಅಥವಾ 2^{3^2} ?

3. ಸುಲಭರೂಪಕ್ಕೆ ತನ್ನಿರಿ.

(i) $$\left(\frac{a^{-\frac{1}{2}}\, x^{-\frac{1}{9}}}{b^{-\frac{1}{3}}\, c^{\frac{2}{9}}}\right)^{-2} \div \left(\frac{b^{\frac{1}{2}}\, x^{-\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{4}}\, c^{\frac{1}{3}}}\right)^{-\frac{4}{3}}$$

(ii) $$\left(\frac{x^m}{x^n}\right)^{m+n} \times \left(\frac{x^n}{x^l}\right)^{n+l} \times \left(\frac{x^l}{x^m}\right)^{l+m}$$

(iii) $$\left(\frac{p+\frac{1}{q}}{q+\frac{1}{p}}\right)^{n} \div \left(\frac{q-\frac{1}{p}}{p-\frac{1}{q}}\right)^{n}$$

(iv) $$\left(\frac{a^x}{a^y}\right)^{x^2+xy+y^2} \times \left(\frac{a^y}{a^z}\right)^{y^2+yz+z^2} \times \left(\frac{a^z}{a^x}\right)^{z^2+zx+x^2}$$

(v) $$\frac{4^{(2^3)} - (4^2)^3}{3\times 2^2 + 3^{(4^0)}} \times \frac{4^{3.958}}{4^{9.958}}$$

4. $2^{x+y} = 16$ ಮತ್ತು $3^{x-y} = 27$ ಆದಾಗ, x ಮತ್ತು y ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. $x = y^a$, $y = z^b$, $z = x^c$ ಆದರೆ $abc = 1$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

6. $m = n^x$ ಮತ್ತು $n = m^y$, $(m \neq o)$ ಆದಾಗ, $xy = 1$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

7. $m = a^x$, $n = a^y$ ಮತ್ತು $a^2 = (m^y\, n^x)^z$ ಆದರೆ, $xyz = 1$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

8. $a^x = b^y = c^z$ ಮತ್ತು $b^2 = ac$ ಆದರೆ, $\frac{2}{y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{z}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

9. $\dfrac{1}{1+x^{a-b}+x^{a-c}}+\dfrac{1}{1+x^{b-c}+x^{b-a}}+\dfrac{1}{1+x^{c-a}+x^{c-b}}=1$
ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

10. $x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}+z^{\frac{1}{3}}=o$ ಆದರೆ, $(x+y+z)^3=27xyz$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

11. $x=2^{\frac{1}{3}}+2^{-\frac{1}{3}}$ ಆದರೆ, $2x^3-6x=5$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

12. $x=2+2^{\frac{1}{3}}+2^{\frac{2}{3}}$ ಆದರೆ, $x^3-6x^2+6x-2=0$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

13. $\sqrt[a]{x^{b-c}}\times\sqrt[b]{x^{c-a}}\times\sqrt[c]{x^{a-b}}=1$
ಆದಾಗ, $(a-b)(b-c)(c-a)=o$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

14. ಇವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ : $(1-x^{\frac{1}{2}})$, $(1+x^{\frac{1}{2}})$ $(1+x)$ ಮತ್ತು $(1+x^2)$.

15. $(a-b)$ ಯನ್ನು $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}$ ಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿರಿ.

16. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{3}}-z^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}$ ಎಂಬುದನ್ನು $x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}+z^{\frac{1}{3}}$ ಎಂಬುದರಿಂದ ಗುಣಿಸಿರಿ.

17. $x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}+z^{\frac{1}{3}}$ ಎಂಬುದರಿಂದ $x+y+z-3\sqrt[3]{xyz}$ ಎಂಬುದನ್ನು ಭಾಗಿಸಿರಿ.

—

5

ಕರಣಿಗಳು

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಬರುವ F ಅಕ್ಷರವು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗಣವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡೋಣ.

5·1 ವ್ಯಾಖ್ಯೆ : $a \in F$ ಇರುವಾಗ a ಯ n ನೇ ಮೂಲವು ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ [ಅಂದರೆ $\sqrt[n]{a} \notin F$] ಯಾದರೆ, ಆಗ $\sqrt[n]{a}$ ಯನ್ನು n ನೇ ಪ್ರಮಾಣದ ಕರಣಿಯೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾ : $2 \in F$, ಮತ್ತು $\sqrt{2} \notin F$; $\therefore$ $\sqrt{2}$ ಒಂದು 2ನೇ ಪ್ರಮಾಣದ ಕರಣಿ. ಇದೇ ರೀತಿ $\sqrt[3]{7}$ ಒಂದು 3 ನೇ ಪ್ರಮಾಣದ ಕರಣಿ. ಆದರೆ $\sqrt{9}$ ಒಂದುಕರಣಿಯಲ್ಲ; ಏಕೆಂದರೆ, $\sqrt{9} = +3 \in F$.

5·2 ಈಗ ಕರಣಿಗಳು ಯುಕ್ತಗೊಳಿಸುವ ಕೆಲವು ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಸಾಧಿಸುತ್ತೇವೆ.

$$\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[mn]{a^{mp}} \quad . \quad . \quad (5{\cdot}2{\cdot}1)$$

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \quad . \quad . \quad (5{\cdot}2{\cdot}2)$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad . \quad . \quad (5{\cdot}2{\cdot}3)$$

ಸಾಧನೆ : (5·2·1) ಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ :

ಎಡಬದಿ $= \sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{p}{n}}$ . . [4·8ನೋಡಿರಿ]

$$= a^{\frac{pm}{nm}}$$

$$= \sqrt[nm]{a^{pm}} = \text{ಬಲಬದಿ}$$

ಇದೇ ರೀತಿ (5.2.2) ಮತ್ತು (5.2.3) ನ್ನು ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

5·3 ವ್ಯಾಖ್ಯೆ : $x^2y\sqrt{8}$ ಎಂಬ ಕರಣಿಯಲ್ಲಿ x^2y ಅನ್ನು $\sqrt{8}$ ಕರಣಿಯ ಗುಣಾಂಕವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದೇ ರೀತಿ $3\sqrt{5}$ ಮತ್ತು $11\sqrt[3]{9}$ ಎಂಬ ಕರಣಿಗಳ ಗುಣಾಂಕಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ 3 ಮತ್ತು 11 ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ. ಯಾವುದೇ ಎರಡೂ ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ಕರಣಿಗಳು ಗುಣಾಂಕ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ಭಿನ್ನವಾಗಿದ್ದರೆ ಅವುಗಳನ್ನು **ಸಜಾತೀಯ ಕರಣಿಗಳೆಂದು** ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾ : $\sqrt{5}$ ಮತ್ತು $8\sqrt{5}$, ಇವೆರಡೂ ಸಜಾತೀಯ ಕರಣಿಗಳು. $\sqrt{20}$ ಎಂಬುದೂ ಇದೇ ಜಾತಿಯ ಕರಣಿಯಾಗಿದೆ. ಏಕೆಂದರೆ,

$$\sqrt{20} = \sqrt{4\times 5} = \sqrt{4} \times \sqrt{5} \qquad [\ (5{\cdot}2{\cdot}2)\ \text{ರಿಂದ}]$$
$$= 2 \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

5·4 ಟೀಕೆ : $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ ಎಂಬುದನ್ನು ಮೇಲೆ ಕಂಡಿದ್ದೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ $2\sqrt{5}$ ಎಂಬುದನ್ನು $\sqrt{20}$ ಎಂಬ ಕರಣಿಯ **ಸರಳರೂಪ**ವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

5·5 ಉದಾ : $\sqrt{52}$, $\sqrt{243}$ ಮತ್ತು $\sqrt[3]{135}$ ಎಂಬ ಕರಣಿಗಳ ಸರಳ ರೂಪಗಳನ್ನು ಪಡೆಯೋಣ.

$$\sqrt{52} = \sqrt{4\times 13} = \sqrt{4} \times \sqrt{13} = 2\sqrt{13},$$

$$\sqrt{243} = \sqrt{81\times 3} = \sqrt{81} \times \sqrt{3} = 9\sqrt{3},$$

$$\sqrt[3]{135} = \sqrt[3]{5\times 27} = \sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{3^3}$$
$$= \sqrt[3]{5} \times 3 = 3\sqrt[3]{5}$$

5·6 ಕರಣಿಗಳಲ್ಲಿ ಆಚರಣೆಗಳು :

(a) ಸಂಕಲನ ಮತ್ತು ವ್ಯವಕಲನ : ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಬರುವ ಎಲ್ಲಾ ಕರಣಿಗಳನ್ನು ಅವುಗಳ ಸರಳರೂಪದಲ್ಲಿ ಮೊದಲು ಬರೆದು, ನಂತರ ಈ ಆಚರಣೆಗಳನ್ನು ಬೀಜವಾಕ್ಯಗಳ ಮೇಲೆ ಆಚರಿಸುವಂತೆ ಇಲ್ಲಿಯೂ ಆಚರಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾ : $\sqrt{20}$, $3\sqrt{5}$, $-7\sqrt{80}$, ಇವುಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯೋಣ.

$$\sqrt{20}=\sqrt{4\times 5}=\sqrt{4}\times\sqrt{5}=2\sqrt{5}$$

$$-7\sqrt{80}=-7\sqrt{5\times 16}=-7\sqrt{5}\times\sqrt{16}=-7\sqrt{5}\times 4$$
$$=-28\sqrt{5}$$

$$\therefore \sqrt{20}+3\sqrt{5}+(-7\sqrt{80})=2\sqrt{5}+3\sqrt{5}+(-28\sqrt{5})$$
$$=\sqrt{5}(2+3-28)$$
$$=\sqrt{5}(-23)$$
$$=-23\sqrt{5}.$$

b) ಗುಣಾಕಾರ ಮತ್ತು ಭಾಗಾಕಾರ : ಮೊದಲು ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಕರಣಿಗಳೆಲ್ಲಾ ಒಂದೇ ಪ್ರಮಾಣದ ಕರಣಿಗಳನ್ನಾಗಿ ಪರಿವರ್ತಿಸಿ ನಂತರ (5.2.2) ಮತ್ತು (5.2.3) ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಪಯೋಗಿಸಿ ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾ: $\sqrt[3]{5}$ ಮತ್ತು $\sqrt[4]{7}$ ಇವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ ಮತ್ತು ಭಾಗಲಬ್ಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

ದತ್ತ ಕರಣಿಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ಪ್ರಮಾಣದ ಕರಣಿಗಳಾಗಿ ಮೊದಲು ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ ದತ್ತ ಕರಣಿಗಳ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 3 ಮತ್ತು 4 ಇವುಗಳ ಲ. ಸಾ. ಅ 12 ಆಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ದತ್ತ ಕರಣಿಗಳನ್ನು 12ನೇ ಪ್ರಮಾಣದ ಕರಣಿಗಳಾಗಿ ಪರಿವರ್ತಿಸುತ್ತೇವೆ [ಏಕೆ ?]

$$\sqrt[3]{5}=\sqrt[3\cdot 4]{5^{1\cdot 4}}=\sqrt[12]{5^4}; \qquad [\ (5.2.1)\text{ರಿಂದ}\ ]$$

$$\sqrt[4]{7}=\sqrt[4\cdot 3]{7^{1\cdot 3}}=\sqrt[12]{7^3}$$

(i) ಗುಣಲಬ್ಧ $=\sqrt[3]{5}\times\sqrt[4]{7}=\sqrt[12]{5^4}\times\sqrt[12]{7^3}$

$$=\sqrt[12]{5^4\times 7^3} \qquad [\ (5.2.2)\text{ರಿಂದ}\ ]$$

(ii) ಭಾಗಲಬ್ಧ $=\dfrac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[4]{7}}=\dfrac{\sqrt[12]{5^4}}{\sqrt[12]{7^3}}=\sqrt[12]{\dfrac{5^4}{7^3}}$ $\qquad$ [(5.2.3)ರಿಂದ]

5·7 ವ್ಯಾಖ್ಯೆ : A ಮತ್ತು B ಗಳು ಎರಡು ದತ್ತ ಕರಣಿಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಲಿ. ಈಗ AB ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ, A ಯನ್ನು Bಯ **ಅಕರಣೀಯ ಅಪವರ್ತನ**ವೆಂದೂ ಮತ್ತು Bಯನ್ನು Aಯ **ಅಕರಣೀಯ ಅಪವರ್ತನ**ವೆಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಸಂಕೇತದಲ್ಲಿ ಅಕರಣೀಯ ಅಪವರ್ತನವನ್ನು **ಅ. ಅ.** ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾ : (i) $\sqrt{5} \times \sqrt{5} = \sqrt{5^2} = 5 \in F$. ಆದ್ದರಿಂದ $\sqrt{5}$ $\sqrt{5}$ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅ.ಅ. ಇದೇ ರೀತಿ $\sqrt{5}$ $-\sqrt{5}$ ನ ಅ.ಅ.ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ

(ii) $\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{2 \times 2^2} = \sqrt[3]{2^3} = 2^{3/3} = 2 \in F$. ಆದ್ದರಿಂದ $\sqrt[3]{2}$ ಮತ್ತು $\sqrt[3]{2^2}$, ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಮತ್ತೊಂದರ ಅ. ಅ. ಆಗಿದೆ.

5·8 ಟೀಕೆ : $\sqrt[n]{a^p}$ ಮತ್ತು $\sqrt[n]{a^{n-p}}$ ಎಂಬ ಕರಣಿಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಮತ್ತೊಂದರ ಅ. ಅ. ಆಗುತ್ತದೆ. ಏಕೆಂದರೆ

$$\sqrt[n]{a^p} \times \sqrt[n]{a^{n-p}} = \sqrt[n]{a^p \times a^{n-p}} = \sqrt[n]{a^n} = a \in F.$$

5·9 ವ್ಯಾಖ್ಯೆ : ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಕರಣಿಗಳ ಮೊತ್ತ ಅಥವಾ ವ್ಯತ್ಯಾಸವನ್ನು **ದ್ವಿಪದ ಕರಣಿ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾ : $a\sqrt{b} + c\sqrt{d}, -\sqrt{x} + \sqrt{y}$ ಇವುಗಳು ದ್ವಿಪದ ಕರಣಿಗಳು. ಇವುಗಳನ್ನು ದ್ವಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣದ ದ್ವಿಪದ ಕರಣಿಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

5·10 ನಿಯಮ : ಯಾವದೇ ಒಂದು ದ್ವಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣದ ದ್ವಿಪದ ಕರಣಿಯ ಅ. ಅ. ವನ್ನು ಬರೆಯಲು ದತ್ತ ಕರಣಿಯಲ್ಲಿ ಬರುವ ಎರಡು ಕರಣಿಗಳ ಪೈಕಿ ಯಾವುದಾದರೊಂದರ ಗುಣಾಂಕದ ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಬೇಕು.

ಸಮರ್ಥನೆ : $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = \sqrt{a}^2 - \sqrt{b}^2$
$= a - b \in F.$

5·11 ವ್ಯಾಖ್ಯೆ : ಎರಡು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಕರಣಿಯನ್ನು **ಸಂಯುಕ್ತ ಕರಣಿ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾ : $\sqrt{2} + \sqrt[3]{11} - \sqrt[7]{17} : \sqrt{a} - \sqrt[3]{b} + \sqrt{f}.$

—

ಅಭ್ಯಾಸ 5.1

1. ಇವುಗಳು ಕರಣಿಗಳೇ ಅಲ್ಲವೇ ನಿರ್ಧರಿಸಿರಿ.

$\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[3]{27}$, $\sqrt[5]{32}$, $\sqrt[4]{92}$.

2. ಇವುಗಳನ್ನು ಸರಳರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

(i) $\sqrt{8}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{27}$, $\sqrt{32}$, $\sqrt{48}$, $\sqrt{54}$, $\sqrt{18}$.

(ii) $4\sqrt{52}$, $9\sqrt{605}$, $5\sqrt{162}$, $\sqrt{128}$.

(iii) $\sqrt[3]{32}$, $\sqrt[3]{24}$, $\sqrt[4]{162}$, $\sqrt{125}$.

3. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಕರಣಿಗಳನ್ನು ಕನಿಷ್ಠ ಸಮಪ್ರಮಾಣದ ಕರಣಿಗಳಾಗಿ ಬರೆಯಿರಿ ಮತ್ತು ಹೋಲಿಸಿರಿ

(i) $\sqrt{14}$, $\sqrt[5]{56}$ (ii) $6\sqrt{5}$, $5\sqrt[3]{4}$ (iii) $\sqrt{\frac{1}{8}}$, $\sqrt[5]{25}$

(iv) $\sqrt[4]{5}$, $\sqrt{3}$ (v) $\sqrt{7}$, $\sqrt[3]{21}$.

4. ಇವುಗಳನ್ನು ಆರೋಹಣ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

(i) $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[4]{5}$ (ii) $2\sqrt{3}$, $3\sqrt{2}$, $\sqrt{10}$

(iii) $2\sqrt{5}$, $3\sqrt{2}$, $\sqrt{10}$ (iv) $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt[4]{12}$, $\sqrt{8}$

(v) $\sqrt{20}$, $\sqrt[3]{50}$, $\sqrt[4]{27}$ (vi) $3\sqrt{5}$, $5\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$

5. $\sqrt[3]{3} > \sqrt[4]{4} > \sqrt[5]{5} > \sqrt[6]{6}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

6. ಇವುಗಳನ್ನು ಸುಲಭರೂಪಕ್ಕೆ ತನ್ನಿರಿ

(i) $4\sqrt{5} + 6\sqrt{20} - \sqrt{45}$

(ii) $\sqrt{12} - 2\sqrt{27} + 3\sqrt{147} - \sqrt{300}$

(iii) $\sqrt{12} - 2\sqrt{27} + 3\sqrt{147}$

(iv) $\sqrt{640} + 2\sqrt{45} - \sqrt{810}$

(v) $3\sqrt[3]{4}-2\sqrt[3]{32}+\sqrt[3]{108}$

(vi) $\sqrt{27}+\sqrt{48}-3\sqrt{12}-\sqrt{3}$

(vii) $\sqrt[3]{27x^4}-\sqrt[3]{125x}+3\sqrt[3]{8x^4}$

7. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಕರಣಿಗಳ **ಆ.ಅ.**ವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ

(i) $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[11]{11}$, $-\sqrt[5]{4^3}$

(ii) $(\sqrt{5}-\sqrt{2})$, $(x\sqrt{y}-z\sqrt{w})$

(iii) $\sqrt{2}+1-\sqrt{5}$, $a+b\sqrt{c}-c\sqrt{d}$

8 ಛೇದವನ್ನು ಅಕರಣೀಯಗೊಳಿಸಿ ಸುಲಭರೂಪಕ್ಕೆ ತನ್ನಿರಿ.

(i) $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}+\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$

(ii) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\dfrac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}-\dfrac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

(iii) $\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{6}}-\dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

(iv) $\left(\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)^2-\left(\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right)^2$

(v) $\dfrac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}+\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}+\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}+\dfrac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}$

(vi) $\dfrac{(2-\sqrt{3})(7+\sqrt{3})}{2+\sqrt{3}}+\dfrac{(2+\sqrt{3})(7-4\sqrt{3})}{2-\sqrt{3}}$

9. ಇವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})\sqrt{7}$.

(ii) $(2\sqrt{5}-\sqrt{5})\sqrt{5}$.

(iii) $(\sqrt{2}-\sqrt[3]{7})(\sqrt{2}+\sqrt[3]{7})$.

(iv) $(2\sqrt{3}-5\sqrt{6})^2$.

(v) $(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})(1-\sqrt{2}+\sqrt{3})$

(vi) $(p\sqrt{q}+q\sqrt{p})^2$

(vii) $(l\sqrt{m}+m\sqrt{l})(l\sqrt{m}-m\sqrt{l})$

(viii) $(3\sqrt{5}-\sqrt{28})(\sqrt{45}+2\sqrt{7})$

(ix) $(\sqrt{4}+\sqrt{3}-\sqrt{20})(\sqrt{4}-\sqrt{3}+\sqrt{20})$

(x) $(3\sqrt{12}-\sqrt{24})^2$

(xi) $(x+a+\sqrt{x+a}+1)(x+a-\sqrt{x+a}+1)$

(xii) $(\sqrt{x-2}+3)(\sqrt{x-2}-3)$

(xiii) $(\sqrt{5}+\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$

(xiv) $(\sqrt{5}-\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$

(xv) $(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5})^2$

(xvi) $(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})$

(xvii) $(\sqrt{3}+\sqrt{8})(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)(\sqrt{12}-\sqrt{32})$

(xviii) $(x+1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2})(x+\sqrt{3}+1)(x-\sqrt{3}-1)$

—

5·12 ಪ್ರಮೇಯ : ಒಂದು ದ್ವಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣದ ಕರಣಿಯನ್ನು ಮತ್ತೊಂದು ದ್ವಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣದ ಕರಣಿ ಮತ್ತು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ, ಇವುಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

ಸಾಧನೆ : $a,b,k\in F$ ಮತ್ತು $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ ಕರಣಿಗಳೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಶಕ್ಯವಾದರೆ,

$$\sqrt{a}=\sqrt{b}+k \quad . \quad . \quad . \quad (5\cdot12\cdot1)$$

ಎಂದಿರಲಿ. ಈಗ $k=o$ ಆದರೆ, ಸಾಧನೆಯ ಅಗತ್ಯವಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ $k\neq o$ ಎನ್ನೋಣ. (5·12·1)ರ ಎರಡೂ ಬದಿಯನ್ನು ವರ್ಗೀಕರಿಸಿದರೆ,

$$\sqrt{a}=(\sqrt{b}+k)^2$$

ಅಥವಾ $a=\sqrt{b}^2+2\sqrt{b}\times k+k^2$

$$= b+2\sqrt{b}\,k+k^2$$

$$\therefore \quad a-b-k^2 = 2\sqrt{b}\,k$$

ಅಥವಾ $$\frac{a-b-k^2}{2k} = \sqrt{b}$$

ಇದರಲ್ಲಿ ಎಡಬದಿ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ, ಬಲಬದಿ ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ. ಇದು ಅಶಕ್ಯ. $\therefore\ k=o$.

5.13 ಪ್ರಮೇಯ : $a, b, x, y \in F$ ಮತ್ತು $\sqrt{b}, \sqrt{y}$ ಕರಣಿಗಳೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಈಗ $a+\sqrt{b} = x + \sqrt{y}$ ಆದರೆ, $a=x$ ಮತ್ತು $b=y$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಸಾಧನೆ : $a = x$ ಎಂದಿರಲಿ. ಆಗ,

$$a+\sqrt{b} = x+\sqrt{y}$$

ಅಥವಾ $$x+\sqrt{b} = x+\sqrt{y}$$

$$\therefore \quad \sqrt{b} = \sqrt{y}$$

$$\sqrt{b}^2 = \sqrt{y}^2$$

$$b = y.$$

ಈಗ $a \neq x$ ಎನ್ನೋಣ. $\therefore\ a > x$ ಅಥವಾ $a < x$ ಆಗುತ್ತದೆ. $a > x$ ಎಂದಿರಲಿ. ಆದ್ದರಿಂದ $a = x + k$ ಇರುವಂತೆ $k \in F$ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

ಈಗ $a + \sqrt{b} = x + \sqrt{y}$ ನಲ್ಲಿ $a = x + k$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸೋಣ. ಇದರಿಂದ,

$$x + k + \sqrt{b} = x + \sqrt{y}$$

ಅಂದರೆ, $$k + \sqrt{b} = \sqrt{y}, \quad k \in F.$$

ಇದು 5.12 ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ವಿರೋಧಿಸುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $a \not> x$. ಇದೇ ರೀತಿ $a \not< x$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

ಅಂದರೆ $a = x$ ಎಂದಾಯಿತು. ಆಗ $b = y$ ಎಂಬುದನ್ನು ಆಗಲೇ ಕಂಡಿದ್ದೇವೆ.

5.14 ದ್ವಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣದ ದ್ವಿಪದ ಕರಣಿಗಳ ವರ್ಗಮೂಲಗಳು :

ಮುಂದೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ದ್ವಿಪದ ಕರಣಿಗಳ ವರ್ಗಗಳನ್ನು ಅವಲೋಕಿಸೋಣ.

$$(\sqrt{3}+\sqrt{5})^2=(\sqrt{3})^2+2(\sqrt{3})(\sqrt{5})+(\sqrt{5})^2$$
$$=3+2\sqrt{15}+5=8+2\sqrt{15}.$$

ಇದೇರೀತಿ $(\sqrt{3}-\sqrt{5})^2=8-2\sqrt{13}.$ ಇದರಿಂದ $x, y \in$ F ಮತ್ತು $\sqrt{y}$ ಕರಣಿಯಾದಾಗ :

$$(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})^2=x \pm \sqrt{y}$$

ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವು ಯುಕ್ತವಾಗುವಂತೆ $a, b \in$ F ಗಳನ್ನು ಕೆಲವು ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಪಡೆಯಬಹುದೆಂಬುದನ್ನು ಮತ್ತು $\sqrt{x \pm \sqrt{y}}$ ಎಂಬುದರ ವರ್ಗಮೂಲವು ಅಂತಹ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವಾಗಲೂ $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ದೊರೆಯುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ಈಗ ತೋರಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇದಕ್ಕಾಗಿ

$\sqrt{x+\sqrt{y}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$ ಎನ್ನೋಣ. ಎರಡೂ ಬದಿಯ ವರ್ಗವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ,

$$x+\sqrt{y}=\sqrt{a}^2+2\sqrt{a}\sqrt{b}+\sqrt{b}^2$$
$$=a+b+2\sqrt{ab}.$$

ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬದಿಯೂ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಮತ್ತು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊಕ್ತವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ,

(i) $a+b=x$; $2\sqrt{ab}=\sqrt{y}$. (5·13 ನೋಡಿರಿ)

(ii) ಅಥವಾ $4ab=y$

ಈಗ $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

$=a^2+2ab+b^2-4ab$

$=(a+b)^2-4ab$

$=x^2-y$. [(i)ಮತ್ತು(ii)ರಿಂದ]

(iii) $\therefore a-b=\pm\sqrt{x^2-y}$

(i) ಮತ್ತು (ii) ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಏಕಕಾಲಿಕ ಸಮೀಕರಣಗಳೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿ ಬಿಡಿಸುವುದರಿಂದ a ಮತ್ತು b ಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು.

5·15 ಉದಾ : $8+2\sqrt{15}$ ಎಂಬುದರ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯೋಣ. $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{8+2\sqrt{15}}$ ಎಂದಿರಲಿ. ಎರಡೂ ಬದಿಯನ್ನು ವರ್ಗೀಕರಿಸುವುದರಿಂದ :

$$a + b + 2\sqrt{ab} = 8 + 2\sqrt{15}$$

ಎರಡೂ ಬದಿಯಲ್ಲಿರುವ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಮತ್ತು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸಮಗೊಳಿಸುವುದರಿಂದ :

(i) $a + b = 8$; $2\sqrt{ab} = 2\sqrt{15}$

(ii) ಅಥವಾ $4ab = 2^2 \times 15 = 60.$

ಈಗ $(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$

$= 8^2 - 60$

$= 4.$

$\therefore \quad a - b = \pm\sqrt{4}$

(iii) ಅಥವಾ $a - b = 2$ ಅಥವಾ $-2.$

ಈಗ (i) ಮತ್ತು (iii) ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಏಕಕಾಲಿಕ ಸಮೀಕರಣಗಳೆಂದು ತಿಳಿದು ಬಿಡಿಸೋಣ.

$$\left.\begin{array}{l} a + b = 8 \\ a - b = 2 \end{array}\right\} \text{ ಅಥವಾ } \left\{\begin{array}{l} a + b = 8 \\ a - b = -2 \end{array}\right.$$

$\therefore \quad a = 5, \quad b = 3$ ಅಥವಾ $a = 3, \quad b = 5.$

$$\therefore \quad \sqrt{8 + 2\sqrt{15}} = \sqrt{3} + \sqrt{5}.$$

5.16 ಟೀಕೆ: $x + \sqrt{y}$, ($x, y \in F$, $\sqrt{y}$ ಕರಣಿ) ಎಂಬ ದ್ವಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣದ ದ್ವಿಪದ ಕರಣಿಯ 4ನೆಯ ಮೂಲವನ್ನು ದೊರೆಯುವ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ $a + \sqrt{b}$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಪಡೆಯಬಹುದು. ಈ ಸಂಗತಿಯು ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಿಂದ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುತ್ತದೆ.

5·17 ಉದಾ: $124 - 32\sqrt{15}$ ಎಂಬ ಕರಣಿಯ 4ನೆಯ ಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯೋಣ.

$\sqrt{124 - 32\sqrt{15}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$ ಎನ್ನೋಣ. ಎರಡು ಬದಿಗಳನ್ನು ವರ್ಗೀಕರಿಸುವುದರಿಂದ :

$$124 - 32\sqrt{15} = a + b - 2\sqrt{ab}$$

$\therefore \quad a + b = 124 \quad$ (i) . . [ಏಕೆ ?]

ಮತ್ತು $-2\sqrt{ab} = -32\sqrt{15}$ ಅಥವಾ $4ab = 15360.$

$$\therefore \quad (a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab$$

$$= (124)^2 - 15360$$
$$= 15376 - 15360$$
$$= 16.$$

$\therefore \quad a - b = 4$ ಅಥವಾ -4. . . . . . (ii)

(i) ಮತ್ತು (ii) ಬಿಡಿಸುವುದರಿಂದ, $a = 60, \quad b = 64$

$\therefore \quad \sqrt{124 \quad 32\sqrt{15}} = \pm(\sqrt{60} - \sqrt{64})$

– ಚಿಹ್ನೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, $= 8 - 2\sqrt{15}$ . . (iii)

ಈಗ $\sqrt[4]{(124 - 32\sqrt{15})} = \{124 - 32\sqrt{15}\}^{\frac{1}{4}}$

$= \{(124 - 32\sqrt{15})^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{2}}$

$= \{\sqrt{124 - 32\sqrt{15}}\}^{\frac{1}{2}}$

$= \{8 - 2\sqrt{15}\}^{\frac{1}{2}}$ [(iii)ರಿಂದ]

$= \sqrt{8 - 2\sqrt{15}}$

$= \sqrt{5} - \sqrt{3}$ [5.15 ಉದಾ]

5.18 ದ್ವಿತೀಯ ಪ್ರಮಾಣದ ತ್ರಿಪದ ಕರಣಿಗಳ ವರ್ಗಮೂಲಗಳು :

ಮುಂದೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ತ್ರಿಪದ ಕರಣಿಗಳ ವರ್ಗಗಳನ್ನು ಸೂಕ್ಷ್ಮವಾಗಿ ಅವಲೋಕಿಸೋಣ.

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})^2 = 10 + 2\sqrt{6} + 2\sqrt{15} + 2\sqrt{10}.$$
$$(-\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})^2 = 10 - 2\sqrt{6} + 2\sqrt{15} - 2\sqrt{10}.$$
$$(\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{5})^2 = 10 - 2\sqrt{6} - 2\sqrt{15} + 2\sqrt{10}.$$

[ಅ—5. 1.9 (xiii), (xiv), (xv), (n), (o) ನೋಡಿರಿ]. ಇದರಿಂದ $a + \sqrt{b} - \sqrt{c} - \sqrt{d}$, ($a, b, c, d \in F$) ಎಂಬ ತ್ರಿಪದ ಕರಣಿಯ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಕೆಲವು ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ $\sqrt{x} - \sqrt{y} + \sqrt{z}$ ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಪಡೆಯಬಹುದು ಎಂಬ ವಿಷಯವು ಗೊತ್ತಾಗುತ್ತದೆ. ಅಂಥಹ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ, ಬೇಕಾದ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಕ್ರಮವನ್ನು ಕೆಳಗೆ ವಿವರಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಈಗ

$$\sqrt{a + \sqrt{b} - \sqrt{c} - \sqrt{d}} = \sqrt{x} - \sqrt{y} + \sqrt{z} \quad (5.18.1)$$

ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಎರಡೂ ಬದಿಯ ವರ್ಗಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವುದರಿಂದ :

$$a + \sqrt{b} - \sqrt{c} - \sqrt{d} = x + y + z - 2\sqrt{xy} - 2\sqrt{yz} + 2\sqrt{zx}$$

ಎರಡೂ ಬದಿಯಲ್ಲಿರುವ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಮತ್ತು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸಮಗೊಳಿಸುವುದರಿಂದ :

$$x+y+z = a \quad . \quad . \quad . \quad \text{(i)}$$

$$2\sqrt{zx} = \sqrt{b} \quad . \quad . \quad . \quad \text{(ii)}$$

$$-2\sqrt{xy} = -\sqrt{c} \quad . \quad . \quad . \quad \text{(iii)}$$

$$-2\sqrt{yz} = -\sqrt{d} \quad . \quad . \quad . \quad \text{(iv)}$$

$\frac{\text{(ii)} \times \text{(iii)}}{\text{iv}}$: ಇದರಿಂದ $\frac{2\sqrt{zx} \times -2\sqrt{xy}}{-2\sqrt{yz}} = \frac{\sqrt{b} \times -\sqrt{c}}{\sqrt{d}}$

ಅಥವಾ $\frac{2\sqrt{zx \cdot xy}}{\sqrt{yz}} = \frac{\sqrt{bc}}{\sqrt{d}}$

$$2\sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{bc}{d}}$$

$$\therefore \quad x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{bc}{d}}$$

ಇದೇರೀತಿ : $y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{cd}{b}}$ . . (5.18 2)

$$z = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{bd}{c}}$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಬಹುದು. (5.18.2) ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ x, y, z ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಲು (ii), (iii), ಮತ್ತು (iv) ರಲ್ಲಿರುವ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದ್ದೇವೆಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ. ಈ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಸಮೀಕರಣ (i) ರ ಎಡಬದಿಯಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ ಮೊತ್ತ a ಆದರೆ, ಮತ್ತು ಆದಾಗ ಮಾತ್ರ (5.18.1) ಯುಕ್ತವಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ದತ್ತ ತ್ರಿಪದ ಕರಣಿಯ ವರ್ಗಮೂಲವು $\sqrt{x} - \sqrt{y} + \sqrt{z}$ ಎಂಬ ರೂಪದಲ್ಲಿ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಉಳಿದ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ವರ್ಗಮೂಲವು ದೊರೆಯುವುದಿಲ್ಲವೆಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ.

5.19 ಉದಾ : ಈಗ $6+\sqrt{18}-\sqrt{12}-\sqrt{24}$ ಎಂಬ ಕರಣಿಯ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯೋಣ.

$$\sqrt{6+\sqrt{8}-\sqrt{12}-\sqrt{24}} = \sqrt{x} - \sqrt{y} + \sqrt{z}$$

ಎನ್ನೋಣ. ಎರಡೂ ಬದಿಯ ವರ್ಗಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದರಿಂದ:

$$6+\sqrt{8}-\sqrt{12}-\sqrt{24}=(\sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{z})^2$$
$$=x+y+z-2\sqrt{xy}-2\sqrt{yz}+2\sqrt{zx}.$$

ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಮತ್ತು ಆಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಸಮಗೊಳಿಸುವದರಿಂದ :

$$x+y+z=6 \quad \ldots \quad \text{(i)}$$
$$-2\sqrt{xy}=-\sqrt{12} \quad \ldots \quad \text{(ii)}$$
$$-2\sqrt{yz}=-\sqrt{24} \quad \ldots \quad \text{(iii)}$$
$$2\sqrt{zx}=\sqrt{8} \quad \ldots \quad \text{(iv)}$$

$\frac{\text{(iv)}\times\text{(ii)}}{\text{(iii)}}$: ಇದರಿಂದ: $\frac{2\sqrt{zx}\times-2\sqrt{xy}}{-2\sqrt{yz}}=\frac{\sqrt{8}\times-\sqrt{12}}{-\sqrt{24}}$

ಅಥವಾ $\frac{2\sqrt{zx^2y}}{\sqrt{yz}}=\frac{\sqrt{8\times12}}{\sqrt{24}}$

$2\sqrt{x^2}=\sqrt{4}$

$\therefore \quad 4x^2=4$ ಅಥವಾ $x=1$

$\frac{\text{(ii)}\times\text{(iii)}}{\text{(iv)}}$: ಇದರಿಂದ: $\frac{-2\sqrt{xy}\times-2\sqrt{yz}}{2\sqrt{zx}}=\frac{-\sqrt{12}\times-\sqrt{24}}{\sqrt{8}}$

ಅಥವಾ $2\sqrt{y^2}=\sqrt{36}$

$\therefore \quad 4y^2=36$ ಅಥವಾ $y=3$

$\frac{\text{(iii)}\times\text{(iv)}}{\text{(ii)}}$ ಇದರಿಂದ: $\frac{-2\sqrt{yz}\times2\sqrt{zx}}{-2\sqrt{xy}}=\frac{-\sqrt{24}\times\sqrt{8}}{-\sqrt{12}}$

ಅಥವಾ $2\sqrt{z^2}=\sqrt{16}$

$\therefore \quad 4z^2=16$ ಅಥವಾ $z=2$

ಮತ್ತು ಹೀಗೆ ಪಡೆದ x, y, z ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಸಮೀಕರಣ (i) ರ ಎಡಬದಿಯಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸೋಣ.

(i) ರ ಎಡಬದಿ : $x+y+z=1+3+2=6=$ ಬಲಬದಿ.

$$\therefore \quad \sqrt{6+\sqrt{8}-\sqrt{12}-\sqrt{24}}=1-\sqrt{3}+\sqrt{2}.$$

5.20 ಟೀಕೆ : $6+\sqrt{8}+\sqrt{12}+\sqrt{24}$ ಎಂಬ ತ್ರಿಪದ ಕರಣಿಯ ವರ್ಗ

ಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, ಸಂಬಂಧಪಟ್ಟ ವರ್ಗಮೂಲವು $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿ ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಮುಂದುವರಿಯಬೇಕು. $9+\sqrt{8}-\sqrt{12}-\sqrt{24}$ ಎಂಬುದರ ವರ್ಗಮೂಲವು ದೊರೆಯುವುದಿಲ್ಲವೆಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ [ಏಕೆ ?]

—

ಅಭ್ಯಾಸ 5.2

1. ಇವುಗಳ ವರ್ಗಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i)	$8+2\sqrt{7}$.	(ii)	$28+10\sqrt{3}$.
(iii)	$11+2\sqrt{30}$.	(iv)	$9-2\sqrt{20}$.
(v)	$33-4\sqrt{35}$.	(vi)	$14+3\sqrt{20}$.
(vii)	$5+\sqrt{21}$.	(viii)	$\sqrt{45}-\sqrt{40}$.
(ix)	$2-\sqrt{3}$.	(x)	$17\sqrt{3}+4\sqrt{45}$.

2. ಇವುಗಳ 4ನೆಯ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i)	$28+16\sqrt{3}$.	(ii)	$68-48\sqrt{2}$.
(iii)	$\frac{7}{4}+\sqrt{3}$.	(iv)	$97-56\sqrt{3}$.
(v)	$56-24\sqrt{5}$.	(vi)	$49-20\sqrt{6}$.
(vii)	$\frac{5}{4}-\frac{\sqrt{6}}{2}$.	(viii)	$17-12\sqrt{2}$.

3. ಇವುಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(i) $$\frac{1}{\sqrt{11-2\sqrt{30}}}-\frac{3}{\sqrt{7-2\sqrt{10}}}-\frac{4}{\sqrt{8+4\sqrt{3}}}=0.$$

(ii) $$\frac{3}{\sqrt{29-2\sqrt{18}}}-\frac{1}{\sqrt{11-2\sqrt{30}}}+\frac{2}{\sqrt{8-2\sqrt{15}}}=0.$$

(iii) $$\frac{3}{\sqrt{7-2\sqrt{10}}}-\frac{2}{\sqrt{8-2\sqrt{15}}}+\frac{1}{\sqrt{8+2\sqrt{6}}}=0.$$

(iv) $\sqrt{-\sqrt{3}+\sqrt{3+8\sqrt{7+4\sqrt{3}}}} = 2.$

4. ಇವುಗಳ ವರ್ಗಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $10+\sqrt{24}-2\sqrt{10}-2\sqrt{15}.$

(ii) $12-4\sqrt{5}-\sqrt{60}+4\sqrt{3}.$

(iii) $6+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2\sqrt{6}.$

(iv) $11+6\sqrt{2}+4\sqrt{3}+2\sqrt{6}.$

(v) $11+2\sqrt{7}+\sqrt{12}+\sqrt{84}.$

(vi) $9+\sqrt{12}-\sqrt{20}-\sqrt{60}.$

(vii) $9+2\sqrt{2}+2\sqrt{10}+2\sqrt{5}.$

(viii) $12+4\sqrt{2}-2\sqrt{3}-4\sqrt{6}.$

5. $x=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ ಮತ್ತು $y=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$ ಆದರೆ, x^2+xy+y^2 ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. $x=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$ ಮತ್ತು $y=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$ ಆದರೆ, x^3+y^3ನ ಬೆಲೆಯೆಷ್ಟು ?

7. $x=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ ಆದಾಗ, $x+\frac{1}{x}=3$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

ತನ್ಮೂಲಕ $\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-5\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+5\left(x+\frac{1}{x}\right)+2=0$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

8. $\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}=\sqrt{2a+2}$ ಆದರೆ,

$$x^3+\frac{1}{x^3}-2a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+x+\frac{1}{x}=0$$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

9. $x=\sqrt{7+4\sqrt{3}}$ ಆದರೆ, $x+\frac{1}{x}=4$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

ತನ್ಮೂಲಕ $\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-3\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-2\left(x+\frac{1}{x}\right)$ ಎಂಬ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

—

6

ಪ್ರತಿಘಾತಗಳು

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿರುವ a, b, x, m, n ಅಕ್ಷರಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಅಕ್ಷರವೂ ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡೋಣ.

6 1 ಸಂಕಲನ, ವ್ಯವಕಲನ, ಗುಣಾಕಾರ ಮತ್ತು ಭಾಗಾಕಾರ— ಈ ಆಚರಣೆಗಳು ಅತೀ ಅವಶ್ಯಕ ಮತ್ತು ಕಡೆಗಣಿಸಲಾಗದಂತಹವುಗಳಾಗಿವೆ. ಸಂಕಲನವು ಗುಣಾಕಾರಕ್ಕಿಂತ ಸುಲಭತರ; ವ್ಯವಕಲನವು ಭಾಗಾಕಾರಕ್ಕಿಂತ ಸುಲಭತರ ಎಂಬುದರ ಬಗ್ಗೆ ಭಿನ್ನಾಭಿಪ್ರಾಯಗಳಿಲ್ಲ. **ಪ್ರತಿಘಾತ**ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಬಹುಶಃ ಇದೇ ಕಾರಣವಿದ್ದರೂ ಇರಬಹುದು. ಜಾನ್ ನೇಪಿಯರ್ ಎಂಬ ಖಗೋಳ ಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರು [1550–1617] ಪ್ರತಿಘಾತಗಳನ್ನು, e ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಆಧಾರವಾಗಿಟ್ಟುಕೊಂಡು, ರಚಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಮೂರು ದಶಮಾಂಶಗಳ ಸ್ಥಾನಕ್ಕೆ ಸರಿಯಾಗಿ $e = 2.718$. e ಯನ್ನು ಆಧಾರವಾಗಿಟ್ಟುಕೊಂಡು ರಚಿಸಿದ ಪ್ರತಿಘಾತಗಳನ್ನು **ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಪ್ರತಿಘಾತ**ಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. 1617ರಲ್ಲಿ ಬ್ರಿಗ್ಸ್ ಎಂಬ ಪ್ರಾಧ್ಯಾಪಕರು 10ನ್ನು ಆಧಾರಮಾಡಿ ಪ್ರತಿಘಾತಗಳ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಪ್ರಕಟಿಸಿದರು. 10ನ್ನು ಆಧಾರಮಾಡಿ ಪಡೆದ ಪ್ರತಿಘಾತವನ್ನು **ಸಾಮಾನ್ಯ ಪ್ರತಿಘಾತ**ವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಗುಣಾಕಾರ ಮತ್ತು ಭಾಗಾಕಾರಗಳನ್ನು ಸುಲಭಗೊಳಿಸುವುದರ ಜೊತೆಗೆ, ಪ್ರತಿಘಾತವೆಂಬ ಭಾವನೆಯು ಪ್ರೌಢ ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಬಹು ಮುಖ್ಯವಾದುದು.

6.2 ವ್ಯಾಖ್ಯೆ: $a^x = n$* ($a \neq 1$ ಮತ್ತು $a > o$) ಇರುವಾಗ x ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು a ಆಧಾರವಾಗುಳ್ಳ n ಸಂಖ್ಯೆಯ **ಪ್ರತಿಘಾತ**ವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು ಸಂಕೇತದಲ್ಲಿ

$$x = log_a n$$

(x ಸಮ a ಆಧಾರದ nನ ಪ್ರತಿಘಾತ ಎಂದು ಓದಿರಿ) ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

---

* x ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದಾಗ a^x ಎಂಬ ಘಾತವು ದೊರೆಯುತ್ತದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿದ್ದೇವೆ.

ಉದಾ : (i) $2^2=4$. ಆದ್ದರಿಂದ, $2=log_2 4$.

(ii) $5^3=125$, ಎಂದರೆ, $3=log_5 125$.

(iii) $10^3=1000$ ಎಂದರೆ $3=log_{10} 1000$.

6.3 **ಟೀಕೆ:** $a^x=n$ ಇರುವಾಗ $x=log_a n$ ಎಂದು ನಿರೂಪಿಸಿದ್ದೇವೆ. ವಿಲೋಮವಾಗಿ $x=log_a n$ ಇರುವಾಗ $a^x=n$ ಎಂಬುದು ಯುಕ್ತವಾಗುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ. ಇದನ್ನು ಸಂಕೇತದಲ್ಲಿ

$$\left.\begin{array}{l} a^x=n \text{ ಎಂದರೆ } x=log_a n \text{ ಮತ್ತು} \\ x=log_a n \text{ ಎಂದರೆ } a^x=n \end{array}\right\} \quad . \quad , (6.3.1)$$

ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಅಥವಾ $a^x=n$ ಆ ಆ ಮಾತ್ರ $x=log_a n$ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ. (6.3.1)ರಲ್ಲಿ $a^x = n$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು **'ಘಾತಾಂಕ ರೂಪ'** ವೆಂದೂ ಮತ್ತು $x = log_a n$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು **'ಪ್ರತಿಘಾತ ರೂಪ'** ವೆಂದೂ ಕರೆಯೋಣ.

—

ಅಭ್ಯಾಸ 6.1

1. ಇವುಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿಘಾತದ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

(i) $2^3=8$. (ii) $12^2=144$.

(iii) $10^4=10,000$. (iv) $\sqrt{256}=16$

(v) $10^{-3}=\frac{1}{10000}$ (vi) $5^{-2}=0.04$

(vii) $10^0=1$ (viii) $10^1=10$

(ix) $10^2=100$ (x) $10^3=1000$

(xi) $10^{-1}=0.1$ (xii) $10^{-2}=0.01$

(xiii) $10^{-3}=0.001$ (xiv) $10^{-4}=0.0001$

2. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದನ್ನೂ ಘಾತಾಂಕರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

(i) $log_3 27 = 3$ (ii) $log_2 64 = 6$

(iii) $log_{11} 121 = 2$ (iv) $log_a n = x$

(v) $log_{10} 35 = 1.5441$ (vi) $log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{32} = 5.$

6.4 ಉದಾ : ಈಗ $log_5 25$ ಮತ್ತು $log_{\sqrt{2}} 16$ ಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯೋಣ.

$log_5 25 = x$ ಎನ್ನೋಣ.

ಎಂದರೆ $5^x = 25$ [6.3 ಟೀಕೆ]

$= 5^2$

$\therefore \quad 5^x = 5^2$ ಎಂದರೆ $x = 2 \quad \therefore \quad log_5 25 = 2$

ಮತ್ತೆ, $log_{\sqrt{2}} 16 = y$ ಎಂದರೆ $16 = (\sqrt{2})^y$

$= \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^y = 2^{\frac{y}{2}}$

$\therefore \quad 16 = 2^4 = 2^{\frac{y}{2}}$ ಎಂದರೆ $4 = \frac{y}{2}$ ಅಥವಾ $8 = y$

$\therefore \quad log_{\sqrt{2}} 16 = 8$

—

ಅಭ್ಯಾಸ 6.2

ಇವುಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

1. $log_{0.1} 100$
2. $log_{2\sqrt{3}} 1728$
3. $log_{5\sqrt{5}} 125.$
4. $log_4 0.25.$
5. $log_{2\sqrt{2}} (256)^{-1}.$
6. $log_2 0{\cdot}0625.$
7. $log_8 128.$
8. $log_{343} 49.$

—

6.5 ಪ್ರಮೇಯ : $log_a m + log_a n = log_a mn.$

ಸಾಧನೆ : $log_a m = x$ ಮತ್ತು $log_a n = y$ ಎನ್ನೋಣ.

$\therefore \quad a^x = m \quad$ (i) $\quad a^y = n \quad$ (ii)

(i) × (ii) : ಇದರಿಂದ : $a^x \times a^y = m \times n$

ಅಂದರೆ $a^{x+y} = mn$

$\therefore \quad x + y = log_a mn$ [6·3 ಟೀಕೆ]

$\therefore \quad log_a m + log_a n = log_a mn.$

6.6 ಪ್ರಮೇಯ : $log_a m - log_a n = log_a \frac{m}{n}$

ಸಾಧನೆ : $log_a m = x$ ಮತ್ತು $log_a n = y$ ಎನ್ನೋಣ.

$\therefore \quad a^x = m \quad$ (i) $\quad a^y = n \quad$ (ii)

$\frac{(i)}{(ii)}$: ಇದರಿಂದ : $\frac{a^x}{a^y} = \frac{m}{n}$

ಎಂದರೆ $a^{x-y} = \frac{m}{n}$

ಎಂದರೆ $x - y = log_a \frac{m}{n}$ [ಏಕೆ ?]

$\therefore \quad log_a m - log_a n = log_a \frac{m}{n}$

6.7 ಪ್ರಮೇಯ: $k \ log_a m = log_a m^k$

ಸಾಧನೆ : $x = log_a m$. ಎನ್ನೋಣ.

$\therefore \quad a^x = m$. ಇದರ ಎರಡು ಬದಿಯನ್ನು k ನೆಯ ಘಾತಕ್ಕೆ ಏರಿಸುವುದರಿಂದ : $a^{kx} = m^k$

ಅಂದರೆ $kx = log_a m^k$ [ಏಕೆ ?]

$\therefore \quad k \ log_a m = log_a m^k$

6.8 ಪ್ರಮೇಯ : $log_a m = \frac{log_b m}{log_b a}$

ಸಾಧನೆ : $\log_a m = x$, $\log_b m = y$ ಮತ್ತು $\log_b a = z$ ಎನ್ನೋಣ.

$\therefore \quad a^x = m$ (i) $\quad b^y = m$ (ii) ಮತ್ತು $b^z = a$ (iii)

(iii) ರಿಂದ : $(b^z)^x = a^x$

ಅಥವಾ : $b^{zx} = a^x = m$ . . . [(i) ರಿಂದ]

$= b^y$ . . . [(ii) ರಿಂದ]

$\therefore \quad b^{zx} = b^y$. ಇದರಿಂದ $zx = y$

$$\therefore \quad x = \frac{y}{z}$$

ಅಥವಾ $\log_a m = \dfrac{\log_b m}{\log_b a}$

ಟೀಕೆ: ಆಧಾರ ಯಾವುದೇ ಇರಲಿ ಕೆಳಗಿನವುಗಳು ಯುಕ್ತವಾಗುತ್ತವೆಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ.

(i) $\log 27 \times 39 = \log 27 + \log 39$ . . [6.5 ಪ್ರಮೇಯ]

(ii) $\log \dfrac{42.71}{3.09} = \log 42.71 - \log 3.09$ [6.6 ಪ್ರಮೇಯ]

(iii) $\log (32.07)^{\frac{5}{3}} = \dfrac{5}{3} \times \log 32.07$ [6.7 ಪ್ರಮೇಯ]

(iv) $\log_5 72 = \dfrac{\log 72}{\log 5}$ . . [6.8 ಪ್ರಮೇಯ]

6.9 ಉದಾ : (i) $\log_{10} 2 = 0.3010$ ಮತ್ತು $\log_{10} 3 = 0.4771$

ಆದರೆ $\log_{10} \sqrt[3]{36} = ?$

ಇಲ್ಲಿ $\sqrt[3]{36} = (36)^{\frac{1}{3}} = (3^2 \times 2^2)^{\frac{1}{3}} = (3 \times 2)^{\frac{2}{3}}$. [ಏಕೆ ?]

$\therefore \quad \log \sqrt[3]{36} = \log (3 \times 2)^{\frac{2}{3}}$

$= \dfrac{2}{3} \log (3 \times 2)$ [6·7 ಪ್ರಮೇಯ]

$$=\frac{2}{3}(\log_{10}3+\log_{10}2) \quad \text{[6.5 ಪ್ರಮೇಯ]}$$

$$=\frac{2}{3}(0.4771+0.3010) \quad \text{[ದತ್ತ]}$$

$$=0.5187$$

(ii) $\log_b a\times \log_a b=1$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸೋಣ.

ಎಡಬದಿ $=\frac{\log_x a}{\log_x b}\times\frac{\log_x b}{\log_x a}=1$ [6.8 ಪ್ರಮೇಯ]

(iii) $(\log a)^2-(\log b)^2=(\log ab)(\log\frac{a}{b})$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸೋಣ.

ಇಲ್ಲಿ ಎಡಬದಿ $=(\log a+\log b)(\log a-\log b)$

$=(\log ab)(\log\frac{a}{b})$ [ಏಕೆ ?]

$=$ ಬಲಬದಿ

ಅಭ್ಯಾಸ 6.3

1. ಇವುಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(i) $\log_a 125\times\log_5 a=3$

(ii) $2\log\left(\frac{6}{7}\right)+\log\left(\frac{9}{4}\right)-\log\left(\frac{27}{196}\right)-\log 3=2\log 2$

(iii) $\log\left(\frac{18}{7}\right)-\log\left(\frac{15}{4}\right)+\log\left(\frac{35}{6}\right)+\log\left(\frac{1}{4}\right)=0$

(iv) $(log_b\, a)\ (log_c\, b)\ (log_a\, c) = 1$

(v) $log\left(\frac{75}{16}\right) - 2\, log\left(\frac{5}{9}\right) + log\left(\frac{32}{243}\right) = log\ 2$

2. (i) $log\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{1}{2}\ (log\, a + log\, b)$ ಆದಾಗ $a = b$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(ii) $log\ \left(\frac{a+b}{3}\right) = \frac{1}{2}\, log\ ab$ ಆಆಮಾತ್ರ $a^2 + b^2 = 7ab$ ಎಂದುಸಾಧಿಸಿರಿ.

(iii) $b^2 = ac$ ಮತ್ತು $x > 0$ ಆದರೆ,

$$\frac{2}{log_b x} = \frac{1}{log_a x} + \frac{1}{log_c x}$$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

6.10 ಸಾಮಾನ್ಯ ಪ್ರತಿಘಾತಗಳು : ಸಂಖ್ಯೆ 10 ನ್ನು ಆಧಾರ ಮಾಡಿ ರಚಿಸಿದ ಪ್ರತಿಘಾತಗಳನ್ನು **ಸಾಮಾನ್ಯ ಪ್ರತಿಘಾತ**ವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈಗ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪ್ರತಿಘಾತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ವಿವರಿಸುತ್ತೇವೆ. ಕೆಳಗಿನ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

$10^4 = 10,000 \quad \therefore \quad 4 = log_{10} 10,000$

$10^3 = 1000 \quad \therefore \quad 3 = log_{10} 1000$

$10^2 = 100 \quad \therefore \quad 2 = log_{10} 100$

$10^1 = 10 \quad \therefore \quad 1 = log_{10} 10$

$10^0 = 1 \quad \therefore \quad 0 = log_{10} 1$

$10^{-1} = 0.1 \quad \therefore \quad -1 = log_{10} 0.1$

$10^{-2} = 0.01 \quad \therefore \quad -2 = log_{10} 0.01$

$10^{-3} = 0.001 \quad \therefore \quad -3 = log_{10} 0.001$

$10^{-4} = 0.0001 \quad \therefore \quad -4 = log_{10} 0.0001$

ಇದರಿಂದ ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಅಂಶಗಳು ಸುಲಭವಾಗಿ ಗಮನಕ್ಕೆ ಬರುತ್ತವೆ.

(i) ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯು ಹತ್ತರ ಘಾತವಾಗಿದ್ದು ಮತ್ತು ಅದರ ಘಾತಾಂಕವು ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾದರೆ, ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಹತ್ತರ ಆಧಾರದ ಪ್ರತಿ ಘಾತವು ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ.

(ii) ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ a ಹೆಚ್ಚಾದಂತೆಲ್ಲ (ಕಡಿಮೆಯಾದಂತೆಲ್ಲಾ) $log_{10}a$ ದ ಬೆಲೆಯೂ ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತಾ (ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತಾ) ಹೋಗುತ್ತದೆ.

(iii) $100 < 842 < 1000$ ಇರುವುದರಿಂದ,

$log_{10}100 < log_{10}842 < log_{10}1000$ . . [(ii) ರಿಂದ]

ಅಂದರೆ, $2 < log_{10}842 < 3$

$\therefore \quad log_{10}842 = 2 +$ * ಧನ ಬಿನ್ನರಾಶಿ

6.11 ವ್ಯಾಖ್ಯೆ : ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ಪ್ರತಿಘಾತದ **ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಭಾಗವನ್ನು ಸ್ವರೂಪಾಂಕ**ವೆಂದೂ ಮತ್ತು **ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಭಾಗವನ್ನು ಶೇಷಾಂಕ** ಭಾಗವೆಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಯಾವಾಗಲೂ $0 <$ ಶೇಷಾಂಕ < 1 ಎಂದು ಒಪ್ಪಿಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ.

6.12 ದಶಮಾಂಶ ಪದ್ಧತಿಯಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿರುವ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ಸ್ವರೂಪಾಂಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವಿಕೆ :

(a) ದತ್ತಸಂಖ್ಯೆ n ಮತ್ತು $n > 1$ ಎಂದಿರಲಿ :

(i) n ನಾಲ್ಕು ಅಂಕೆಗಳ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಾದಾಗ :

$1000 < n < 10,000$. [ಏಕೆ ?]

$\therefore \quad log_{10}1000 < log_{10}n < log_{10}10,000$ [ಏಕೆ ?]

ಅಂದರೆ, $3 < log_{10}n < 4$ [6·10, (ii) ರಿಂದ]

$\therefore \quad log_{10}n = 3 +$ ಧನ ಭಿನ್ನರಾಶಿ

$= (4-1) +$ ಧನ ಬಿನ್ನರಾತಿ

$=$ (ಅಂಕೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ -1) $+$ ಧನಬಿನ್ನರಾಶಿ

---

* ಇಲ್ಲಿ $0 <$ ಧನ ಭಿನ್ನರಾಶಿ < 1 ಎಂದು ಭಾವಿಸಿದ್ದೇವೆ.

(ii) n ಮೂರು ಅಂಕೆಗಳ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಾದಾಗ :

$$100 < n < 1000$$

$$\therefore \quad log_{10}100 < log_{10}n < log_{10}1000$$

ಅಂದರೆ, $2 < log_{10}n < 3$

$\therefore \quad log_{10}n = 2$ + ಧನ ಬಿನ್ನರಾಶಿ

= $(3-1)$ + ಧನ ಭಿನ್ನರಾಶಿ

= (ಅಂಕೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ -1) + ಧನ ಭಿನ್ನರಾಶಿ

(iii) n ಎರಡು ಅಂಕೆಗಳ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಾದಾಗ :

$$10 < n < 100$$

$$\therefore \quad log_{10}10 < log_{10}n < log_{10}100$$

ಅಂದರೆ, $1 < log_{10}n < 2$

$\therefore \quad log_{10}n = 1$ + ಧನ ಭಿನ್ನರಾಶಿ

= $(2-1)$ + ಧನಭಿನ್ನರಾಶಿ

= (ಅಂಕೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ-1) + ಧನಭಿನ್ನ ರಾಶಿ

(iv) n ಒಂದು ಅಂಕೆಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದಾಗ :

$$1 < n < 10$$

$$\therefore \quad log_{10}1 < log_{10}n < log_{10}10$$

ಅಂದರೆ, $0 < log_{10}n < 2$

$\therefore \quad log\ n = 0$ + ಧನ ಬಿನ್ನರಾಶಿ

= $(1-1)$ + ಧನಭಿನ್ನರಾಶಿ.

= (ಅಂಕೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ -1) + ಧನಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳು

(i), (ii), (iii) ಮತ್ತು (iv) ರ ಅವಲೋಕನೆಯಿಂದ, ಮುಂದೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ನಿಯಮವನ್ನು ನಿರೂಪಿಸುತ್ತೇವೆ.

ನಿಯಮ I : ಒಂದು ಮತ್ತು ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಅಧಿಕವಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಪ್ರತಿಘಾತದ ಸ್ವರೂಪಾಂಕವು ಒಂದು ಧನಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಅದು ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಿಂತ ಒಂದು ಕಡಿಮೆಯಿರುತ್ತದೆ.

(*b*) **ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆ n ಮತ್ತು $0 < n < 1$ ಎನ್ನೋಣ :**

(i) n ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿನ ★ ಶೂನ್ಯಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 0 ಆದಾಗ

$$0.1 < n < 1$$ [ಏಕೆ ?]

$\therefore \quad \log_{10} 0.1 < \log_{10} n < \log_{10} 1$

ಅಂದರೆ, $-1 < \log_{10} n < 0$ [6.10 ರಿಂದ]

$\therefore \quad \log_{10} n = -1+$ ಧನ ಭಿನ್ನರಾಶಿ

$= -(0+1) +$ ಧನ ಭಿನ್ನರಾಶಿ

$= -($ಶೂನ್ಯಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $+1) +$ ಧನ ಭಿನ್ನರಾಶಿ

(ii) n ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿನ ಶೂನ್ಯಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 1 ಆದಾಗ :

$$0.01 < n < 0.1$$

$\therefore \quad \log_{10} 0.01 < \log_{10} n < \log_{10} 0.1$

ಅಂದರೆ, $-2 < \log_{10} n < -1$

$\therefore \quad \log_{10} n = -2 +$ ಧನ ಭಿನ್ನರಾಶಿ

$= -(1+1) +$ ಧನ ಭಿನ್ನರಾಶಿ

$= -($ಶೂನ್ಯಗಳಸಂಖ್ಯೆ $+1) +$ ಧನ ಭಿನ್ನರಾಶಿ.

(iii) n ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿನ ಶೂನ್ಯಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 2 ಆದಾಗ :

$$0.001 < n < 0.01$$

$\therefore \quad \log_{10} 0.001 < \log_{10} n < \log_{10} 0.01$

ಅಂದರೆ $-3 < \log_{10} n < -2$

$\therefore \quad \log_{10} n = -3 +$ ಧನ ಬಿನ್ನರಾಶಿ

$= -(2+1) +$ ಧನ ಭಿನ್ನರಾಶಿ

$= -($ಶೂನ್ಯಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $+1) +$ ಧನ ಭಿನ್ನರಾಶಿ

(iv) n ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿನ ಶೂನ್ಯಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 3 ಆದಾಗ :

$$0.0001 < n < 0.001$$

$\therefore \quad \log_{10} 0.0001 < \log_{10} n < \log_{10} 0.001$

★ ಇದು n ಸಂಖ್ಯೆಯ ದಶಮಾಂಶ ಬಿಂದುವಿನ ಬಲಬದಿಗೆ ಮೊಟ್ಟಮೊದಲು ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಅಂಕೆಯವರೆಗಿರುವ ಶೂನ್ಯಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸಲಾಗಿದೆ. ಉದಾ : $n = 0.000078001$ ಆದರೆ, n ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿನ ಶೂನ್ಯಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $= 4$.

ಅಂದರೆ $-4 < log_{10}n < -3$

$\therefore \quad log_{10}n = -4 +$ ಧನ ಭಿನ್ನರಾಶಿ

$= -(3+1) +$ ಧನ ಭಿನ್ನರಾಶಿ.

$= -($ಶೂನ್ಯಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $+ 1) +$ ಧನ ಭಿನ್ನರಾಶಿ.

(i), (ii), (iii) ಮತ್ತು (iv) ರ ಅವಲೋಕನೆಯಿಂದ, ಮುಂದೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ನಿಯಮವನ್ನು ನಿರೂಪಿಸುತ್ತೇವೆ.

ನಿಯಮ II : ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಿರುವ ಒಂದು ಧನಸಂಖ್ಯೆಯ ಪ್ರತಿಘಾತದ ಸ್ವರೂಪಾಂಕವು ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯ ದಶಮಾಂಶ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಬಲಬದಿಗೆ ಮೊಟ್ಟಮೊದಲ ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಅಂಕೆಯವರೆಗಿರುವ ಶೂನ್ಯಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಿಂತ ಒಂದು ಅಧಿಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಋಣ ಚಿಹ್ನೆಯುಳ್ಳದ್ದಾಗಿರುತ್ತದೆ.

6.13 ಉದಾ: $log_{10}6154 = 3.7892$ ಆದರೆ, 615.4, 61.54, 6.154 ಮತ್ತು 0.006154 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪ್ರತಿಘಾತಗಳನ್ನು (ಆಧಾರ 10) ಕಂಡು ಹಿಡಿಯೋಣ.

$log_{10}6154 = 3.7892$ . . [ದತ್ತ]

$\therefore \quad 10^{3.7892} = 6154$ . . (i)

$\frac{(i)}{10}$: ಇದರಿಂದ : $\frac{10^{3.7892}}{10} = \frac{6154}{10}$

ಅಥವಾ : $10^{2.7892} = 615.4$ (ii) [(4.3.2) ರಿಂದ]

$\therefore \quad 2.7892 = log_{10}615.4$ [6.3 ಟೀಕೆ]

$\frac{(ii)}{10}$: ಇದರಿಂದ : $\frac{10^{2.7892}}{10} = \frac{615.4}{10}$

ಅಥವಾ : $10^{1.7892} = 61.54$ . . (iii)

$\therefore \quad 1.7892 = log_{10}61.54$ [ಏಕೆ?]

$\frac{(iii)}{10}$: ಇದರಿಂದ : $\frac{10^{1.7892}}{10} = \frac{61.54}{10}$

$\therefore \quad 10^{0.7892} = 6.154$ . . (iv)

ಅಥವಾ $0.7892 = log_{10} 6.154$

$\frac{(iv)}{1000}$: ಇದರಿಂದ : $\frac{10^{0.7892}}{10^3} = \frac{6.154}{1000}$

$\therefore \quad 10^{-3+0.7892} = 0.006154$

ಅಥವಾ $-3 + 0.7892 = log_{10} 0.006154$

6.14 ಟೀಕೆ : ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಸೂಕ್ಷ್ಮವಾಗಿ ಅವಲೋಕಿಸಿದರೆ ತಿಳಿಯುವ ವಿಷಯ : **ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನದ ವರ್ಗಾವಣೆಯಿಂದ** [ಉದಾ : 6154, 615.4, 61.54, 6154 ಮತ್ತು 0.006154] **ದೊರೆಯುವ ಎಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪ್ರತಿಘಾತಗಳು** [3.7892, 2.7892, 1.7892, 0.7892 ಮತ್ತು −3+·7892] **ಶೇಷಾಂಕದಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಆಗಿದ್ದು, ರೂಪಾಂಕದಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ಭಿನ್ನವಾಗಿರುತ್ತವೆ.**

6.15 ಟೀಕೆ : 6.13 ಉದಾ : ದಲ್ಲಿ $log\ 0.006154 = -3 + 0.7892$ ಎಂಬುದನ್ನು ಕಂಡಿದ್ದೇವೆ. ಈಗ $-3 + 0.7892 \neq -3.7892$ [ಏಕೆಂದರೆ, $-3.7892 = -3 - 0.7892$]. ಆದ್ದರಿಂದ $-3 + 0.7892$ ಎಂಬುದನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಸೂಚಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಸಂಕೇತವೊಂದರ ಅವಶ್ಯಕತೆ ಕಂಡು ಬರುತ್ತದೆ. ಈ ಅವಶ್ಯಕತೆಯನ್ನು ಪೂರೈಸುವ ಸಲುವಾಗಿ, $-3 + 0.7892$ ಎಂಬುದನ್ನು

$$-3 + 0.7892 = \bar{3}.7892 \qquad \cdot \qquad \cdot \quad (6.15.1)$$

ಎಂದು ಬರೆಯಲು ಒಪ್ಪಿಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ. (6.15.1) ರ ಬಲಬದಿಯಲ್ಲಿ 3 ರ ಮೇಲೆ ಬರುವ ಋಣ ಚಿಹ್ನೆಯು 3 ಕ್ಕೆ ಮಾತ್ರ ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ. [$\bar{3}.7892$ ಎಂಬುದನ್ನು ಬಾರ್ 3 ಬಿಂದು 7892 ಎಂದು ಓದಿರಿ.]

6.16 ಉದಾ : $log\ 5.273 = 0.7220$ ಮತ್ತು ಕೆಲವು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪ್ರತಿಘಾತಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ 1.7220, 3.7220, $\bar{1}$. 7220, ಮತ್ತು $\bar{2}.7220$ ಆದಾಗ, ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾವುವು? ಪತ್ತೆ ಮಾಡೋಣ.

6.14 ಟೀಕೆಯಿಂದ ಗೊತ್ತಾಗುವ ವಿಷಯ–ನಮಗೆ ಬೇಕಾಗಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

5273.0000 ಸಂಖ್ಯೆಯ ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನದ ವರ್ಗಾವಣೆಯಿಂದ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $\log x = 1.7220$ ಎಂದರೆ, x ನ ಪ್ರತಿಘಾತದಲ್ಲಿ, ಸ್ವರೂಪಾಕ $=$ 1 ಎಂದಾಯಿತು. ಆದ್ದರಿಂದ **6.12 ನಿಯಮ I** ರ ಪ್ರಕಾರ x ನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಅಂಕೆಗಳಿರಲೇಬೇಕು. ಆದ್ದರಿಂದ $x = 52.73$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಇದೇ ರೀತಿ $\log y = 3.7220$ ಎಂದರೆ $y = 5273$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ [ಏಕೆ ?].

ಈಗ $\log z = \bar{2}.7220$ ಎನ್ನೋಣ. z ನ ಪ್ರತಿಘಾತದ ಸ್ವರೂಪಾಕ -2 ಎಂದಾಯಿತು. ಆದ್ದರಿಂದ **6.12 ನಿಯಮ II** ರ ಪ್ರಕಾರ, z ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ದಶಮಾಂಶ ಬಿಂದುವಿನ ಬಲಭಾಗದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಶೂನ್ಯವಿರಲೇಬೇಕು. ಆದ್ದರಿಂದ $z = 0.05273$ ಎಂಬುದು ಗೊತ್ತಾಗುತ್ತದೆ. ಇದೇ ರೀತಿ $\bar{1}.7220$ ವನ್ನು ಪ್ರತಿಘಾತವಾಗುಳ್ಳ ಸಂಖ್ಯೆ 0.5273 ಎಂದು ತೋರಿಸಬಹುದು.

6.17 ಸಾಮಾನ್ಯ ಪ್ರತಿಘಾತಗಳ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಓದುವ ಕ್ರಮ :

ಹತ್ತನ್ನು ಆಧಾರ ಮಾಡಿ, ಎಲ್ಲಾ ಧನಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪ್ರತಿಘಾತಗಳನ್ನು ಗಣಿಸಿ ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ. ಈ ಪ್ರತಿಘಾತಗಳ ಶೇಷಾಂಕ ಭಾಗವನ್ನು ಮಾತ್ರ ಈ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಸೇರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಈಗ ಪ್ರತಿಘಾತಗಳ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. ಇದರಲ್ಲಿ ಶೇಷಾಂಕಗಳನ್ನು 90 ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳಲ್ಲೂ ಮತ್ತು 10 ನೀಟ ಸಾಲುಗಳಲ್ಲೂ ಅಳವಡಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇದರ ಜೊತೆಗೆ, ಸರಾಸರಿ ವ್ಯತ್ಯಾಸವೆಂಬ ಅಂಕಿತವುಳ್ಳ 9 ನೀಟ ಸಾಲುಗಳನ್ನೂ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಮೊದಲನೇ ನೀಟ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ [ಪ್ರತಿಘಾತಗಳ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ನೋಡಿರಿ] 10 ರಿಂದ ಮೊದಲ್ಗೊಂಡು 99 ರ ವರೆಗಿನ ಎಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೂ ನಮೂದಿಸಲಾಗಿದೆ. ಉಳಿದ 9 ನೀಟ ಸಾಲುಗಳನ್ನು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ 0, 1, 2,..., 9 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ಗುರ್ತಿಸಲಾಗಿದೆ. ಸರಾಸರಿ ವ್ಯತ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ನೀಟ ಸಾಲುಗಳನ್ನು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ 1,2,3,..., 9 ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ಗುರ್ತಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಈಗ 6394 ಸಂಖ್ಯೆಯ ಪ್ರತಿಘಾತವನ್ನು ಪಟ್ಟಿಯ ಉಪಯೋಗಮಾಡಿ ಪಡೆಯೋಣ. ಇದಕ್ಕಾಗಿ ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಮೊದಲ ಎರಡು ಅಂಕೆಗಳು [63] ಗುರ್ತಿಸುವ ಅಡ್ಡಸಾಲನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. ನಂತರ, ಈ ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮತ್ತು ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯ 3 ನೇ ಅಂಕೆಯು [9] ಗುರ್ತಿಸುವ ನೀಟ ಸಾಲು— ಈ ಸಾಲುಗಳೆರಡೂ ಛೇದಿಸುವಲ್ಲಿ ಇರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು [8055] ಬರೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಮತ್ತೆ ಇದೇ ಅಡ್ಡ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿರುವ, ಹಾಗೂ ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯ 4 ನೇ ಅಂಕೆಯು [4] ಗುರ್ತಿಸುವ ಸರಾಸರಿ ವ್ಯತ್ಯಾಸದ ನೀಟ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು [3],

ಆಗಲೇ ಬರೆದುಕೊಂಡ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ [ಅಂದರೆ 8055 ಕ್ಕೆ] ಕೂಡೋಣ. ಹೀಗೆ ಪಡೆದ ಸಂಖ್ಯೆ $8055+3=8058$, ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಪ್ರತಿಘಾತದ ಶೇಷಾಂಕ ಭಾಗವನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡೋಣ. ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆ 6394ರ ಪ್ರತಿಘಾತದ ಸ್ವರೂಪಾಂಕವು 3 ಇರುವುದರಿಂದ [ಏಕೆ?], $log 6394 =$ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ $+$ ಶೇಷಾಂಕ $= 3 + 0.8058 = 3.8058$.

ಉದಾ : 0.00 6483 ರ ಪ್ರತಿಘಾತವನ್ನು ಪ್ರತಿಘಾತಗಳ ಪಟ್ಟಿಯಿಂದ ಪಡೆಯೋಣ.

ಬೇಕಾದ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ $= -(2+1) = -3$. ∴ [ಏಕೆ?]

ಬೇಕಾದ ಶೇಷಾಂಕ $= 8116 + 2 = 8118$

$$\therefore \quad log\, 0.006483 = -3 + 0.8118$$
$$= \bar{3}.8118$$

6.18 ವ್ಯಾಖ್ಯೆ : $log_n \; n = x$ ಆದಾಗ n ಎಂಬುದನ್ನು x ನ **ವಿಲೋಮ ಪ್ರತಿಘಾತ**ವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಸಂಕೇತದಲ್ಲಿ, ಇದನ್ನು $n = Antilog\ x$ [x ನ ವಿಲೋಮ ಪ್ರತಿಘಾತ ಎಂದು ಓದಿರಿ] ಎಂದು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾ: $log\ 63.94 = 1.8058$

$$\therefore \quad 63.94 = Antilog\ 1.8058$$

6.19 ವಿಲೋಮ ಪ್ರತಿಘಾತಗಳ ಪಟ್ಟಿ : ಈ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳನ್ನು 0.00 ದಿಂದ 0.99 ರ ವರೆಗೆ ಗುರ್ತಿಸಲಾಗಿದೆ. ನೀಟ ಸಾಲುಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿಘಾತಗಳ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಗುರ್ತಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಈಗ 1.2325 ರ ವಿಲೋಮ ಪ್ರತಿಘಾತವನ್ನು, ಪಟ್ಟಿಯನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಪಡೆಯೋಣ. ಅಂದರೆ 1.2325 ನ್ನು 10 ರ ಆಧಾರದ ಪ್ರತಿಘಾತವಾಗಿ ಪಡೆದಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು. ಇದಕ್ಕೆ ಬೇಕಾದ ಸಂಖ್ಯೆಯ [$log\ x = 1.2325$ ಎಂದರೆ, ಬೇಕಾದ ಸಂಖ್ಯೆ $= x$] ಪ್ರತಿಘಾತದ ಶೇಷಾಂಕ ಭಾಗವನ್ನು, ಅಂದರೆ, 0.2325 ನ್ನು **ಮಾತ್ರ** ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ [ಏಕೆ?].

ವಿಲೋಮ ಪ್ರತಿಘಾತ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ 0.23 ರಿಂದ ಗುರ್ತಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಅಡ್ಡಸಾಲು

ಮತ್ತು ಶೇಷಾಂಕದ 3 ನೇ ಅಂಕೆ 2 ರಿಂದ ಗುರ್ತಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ನೀಟ ಸಾಲು, ಇವೆರಡು ಛೇಧಿಸುವ ಕಡೆ ಇರುವ 1706 ನ್ನು ಬರೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ. ನಂತರ ಇದೇ ಅಡ್ಡ ಸಾಲು ಮತ್ತು ಸರಾಸರಿ ವ್ಯತ್ಯಾಸದ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಶೇಷಾಂಕದ 4 ನೇ ಅಂಕೆಯಾದ 5 ರಿಂದ ಗುರ್ತಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ನೀಟ ಸಾಲು, ಇವೆರಡು ಛೇಧಿಸುವಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆ 2 ನ್ನು ಹಿಂದೆ ಪಡೆದ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದ 1706 ಕ್ಕೆ ಕೂಡಿಸುತ್ತೇವೆ. ಹೀಗೆ $1706+2=1708$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಲು, ಪ್ರತಿಘಾತದ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಭಾಗವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ. ಪ್ರಕೃತ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಸ್ವರೂಪಾಂಕವು 1 ಇರುವುದರಿಂದ, ಬೇಕಾದ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ 2 ಅಂಕೆಗಳಿರಲೇಬೇಕು. [ಏಕೆ? **6.12 ನಿಯಮ 1** ನೋಡಿರಿ]. ಆದ್ದರಿಂದ ಬೇಕಾದ ಸಂಖ್ಯೆ $x=17.08$.

ಉದಾ : ಈಗ $\bar{2}.2325$ ರ ವಿಲೋಮ ಪ್ರತಿಘಾತವನ್ನು ಬರೆಯೋಣ.

Antilog $1.2325=17.08$ ಎಂಬುದನ್ನು ಆಗಲೇ ಕಂಡಿದ್ದೇವೆ :

$\therefore$ *Antilog* $\bar{2}.2325=0.01708$. [ಏಕೆ ?]

6.20 ಟೀಕೆ : ಇಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪ್ರತಿಘಾತ ಮತ್ತು ವಿಲೋಮ ಪ್ರತಿಘಾತಗಳ ಪಟ್ಟಿಗಳನ್ನು 4 ಸ್ಥಾನಗಳಿಗೆ ಮಾತ್ರ ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ. ಹೆಚ್ಚಿನ ನಿಖರತೆಯು ಬೇಕಾದಲ್ಲಿ 5 ಅಥವಾ 7 ಸ್ಥಾನಗಳುಳ್ಳ ಪಟ್ಟಿಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು. ಆಧಾರವನ್ನು ಬರೆಯದೆ $\log n$ ಎಂದು ಬರೆದರೆ ಅದು 10 ರ ಅಧಾರದ ಪ್ರತಿಘಾತವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆಂದು ಒಪ್ಪಿಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಅಭ್ಯಾಸ 6.4

A. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಲೆಕ್ಕಗಳಲ್ಲಿ, ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪ್ರತಿಘಾತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

1. 35 **2.** 105 **3.** 0.00621 **4.** 23,100
5. 0.354 **6.** 0.0663 **7.** $\log 7.03$ **8.** $\log 695$
9. 0.007001 **10.** 0.7777 **11.** 3.142
12. 0.08788 **13.** 15.46

B. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಲೆಕ್ಕಗಳಲ್ಲಿ, ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವಿಲೋಮ ಪ್ರತಿಘಾತಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

1. 1.6665	**2.** $\bar{1}.4183.$	**3.** 2.7024	**4.** $\overline{11}.4409$
5. 1.8401	**6.** 2.4658	**7.** 9.7367	**8.** $\bar{2}.7863$
9. 0.6584	**10.** $\bar{5}.0300$	**11.** 0.1504	

6.21 ಉದಾ : $(234)^{-5}$ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಪ್ರತಿಘಾತದ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಮತ್ತು ಶೇಷಾಂಕ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಬರೆಯೋಣ.

$n=(234)^{-5}$ ಎಂದಿರಲಿ.

$\therefore \quad log\ n = log\ (234)^{-5}$

$= -5\ log\ 234$ . . [6.7 ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ]

$= -5 \times 2.3692$

$= -11.8460$

$= -11 + (-0.8460)$, ಎಂದಿರುವುದರಿಂದ

ಶೇಷಾಂಕ ಭಾಗ $\neq$ 0.8460 ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ. [6.11 ವ್ಯಾಖ್ಯೆ ನೋಡಿರಿ]. ಈಗ

$$-0.8460 = -1 + (1 - 0.8460) = -1 + 0.1540$$

ಆದ್ದರಿಂದ $log\ n = -11 + (-0.8460)$

$= -11 + (-1 + 0.1540)$

$= (-11 - 1) + 0.1540$ . . [ಏಕೆ?]

$= -12 + 0.1540$

$= \overline{12}.1540$

$\therefore$ $logn$ ದ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ $= -12$ ಮತ್ತು ಶೇಷಾಂಕ $= 0.1540$

6 22 ಉದಾ : ಪ್ರತಿಘಾತಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ, ಸುಲಭರೂಪಕ್ಕೆ ತರಬೇಕಾದ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಕಾರಿಯಾಗುವ ಕೆಲವು ಕೌಶಲಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿದ್ದೇವೆ.

(i)
$$\begin{aligned}\bar{2}.4231\times 7 &= (-2+0.4231)\times 7\\ &= -2\times 7+0.4231\times 7\\ &= -14+2.9617\\ &= (-14+2)+0.9617\\ &= -12+0.9617=\overline{12}.9617\end{aligned}$$

(ii)
$$\bar{2}.2417+3.4213=\left\{\begin{array}{r}-2+0.2417\\ 3+0.4213\end{array}\right\}$$ ಕೂಡೋಣ.
$$\begin{array}{r}1+0.6630\\ =\ 1.6630\end{array}$$

(iii)
$$2.4213-\bar{7}.1411=\left\{\begin{array}{r}2+0.4213\\ -7+0.1411\end{array}\right\}$$ ಕಳೆಯೋಣ.
$$9+.2802$$ [ಏಕೆ?]
$$=\ 9.2802$$

(iv)
$$0.0012-\bar{5}.1423=\left\{\begin{array}{r}0+0.0012\\ -5+0.1423\end{array}\right\}$$
$$=\left\{\begin{array}{r}-1+(1.0012)\\ -5+\ 0.1423\end{array}\right\}$$ ಕಳೆಯೋಣ
$$\begin{array}{r}4+0.8589\\ =\ 4.8589\end{array}$$

(v)
$$\begin{aligned}\frac{\bar{3}.4268}{4} &= \frac{-3+0.4268}{4}\\ &= \frac{(-4+1)+0.4268}{4}\\ &= \frac{-4+(1+0.4268)}{4}\end{aligned}$$

$$= \frac{-4}{4} + \frac{1.4268}{4}$$
$$= -1 + 0.3567 = \bar{1}.3567$$

6.23 **ಉದಾ :** $log_{10}2 = 0.30103$ ಮತ್ತು $log_{10}3 = 0.47712$ ಆದರೆ 6^{20} ರಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

$x = 6^{20}$ ಎಂದಿರಲಿ.

$$\therefore \quad log\ x = log\ 6^{20}$$
$$= 20\ log\ 6$$
$$= 20\ log\ 3 \times 2$$
$$= 20(log 3 + log 2)$$ [6.5ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ]
$$= 20\ (0.47712 + 0.30103)$$
$$= 20 \times 0.77815 = 15.5630$$

ಆದ್ದರಿಂದ xನ ಪ್ರತಿಘಾತದ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಭಾಗ $= 15$. ಅಂದರೆ, xನಲ್ಲಿ $(15+1)$ ಅಂಕೆಗಳಿರಲೇಬೇಕು. [**6 12 ನಿಯಮ 1 ರಿಂದ**].

6.24 **ಉದಾ :** $\dfrac{\sqrt{3.412} \times \sqrt[3]{4.516}}{\sqrt[4]{(4.2103)^3}}$, ಇದನ್ನು ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸೋಣ.

$P = \sqrt{3.42} \times \sqrt[3]{4.516}$ ಮತ್ತು $Q = \sqrt[4]{(4.2103)^3}$ ಎನ್ನೋಣ.
ಈಗ ದತ್ತ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು N ಎಂಬ ಸಂಕೇತದಿಂದ ಸೂಚಿಸಿದರೆ,

$$N = \frac{P}{Q}$$

$$\therefore \quad log\ N = log\ \frac{P}{Q}$$
$$= log\ P - log\ Q \quad . \quad . \quad \text{(i)}$$

ಈಗ $log\ P = log\ (\sqrt{3.412} \times \sqrt[3]{4.516})$

$$= log\ \sqrt{3.412} + log\ \sqrt[3]{4.516}$$ [ಏಕೆ?]

$$= log(3.412)^{\frac{1}{2}} + log(4.516)^{\frac{1}{3}}$$ [ಏಕೆ?]

$$= \frac{1}{2} log(3.412) + \frac{1}{3} log\ (4.516)$$ [ಏಕೆ?]

$$= \frac{1}{2} \times 0.5331 + \frac{1}{3} \times 0.6548$$

$$= 0.2666 + 0.2183 = 0.4849$$

ಮತ್ತು, $log\ Q = log\sqrt[4]{(4.2103)^3}$

$$= log\ (4.2103)^{\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{3}{4} \times log\ 4.2103$$

$$= \frac{3}{4} \times 0.6243 = 0.4682$$

ಈ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು (i) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸುವದರಿಂದ :

$$log\ N = 0.4849 - 0.4682$$

$$= 0.0167$$

$$\therefore\ N = Antilog\ 0.0167 = 1.04$$ [ಏಕೆ?]

6.25 **ಉದಾ :** $5^{1-x} = 6^{x-3}$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಯುಕ್ತಗೊಳಿಸುವ x ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಎರಡು ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳವರೆಗೆ ಪಡೆಯೋಣ.

ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣದ ಎರಡೂ ಬದಿ ಪ್ರತಿ ಘಾತಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವದರಿಂದ :

$$log\ 5^{1-x} = log\ 6^{x-3}$$

$$\therefore\ (1-x)\ log\ 5 = (x-3)\ log\ 6$$

$$log\ 5 - x\ log\ 5 = x\ log\ 6 - 3\ log\ 6$$

x ಇರುವ ಪದಗಳನ್ನ ಒಂದೇ ಬದಿಗೆ ಸರಿಸುವುದರಿಂದ :

$$log5 + 3\ log\ 6 = x\ log\ 6 + x\ log\ 5$$

$$= x\ (log\ 6 + log\ 5).$$

$$\therefore \quad x = \frac{log5 + 3log6}{log6 + log5}$$

$$= \frac{0.6990 + 3 \times 0.7782}{0.7782 + 0.6990}$$

$$= \frac{3.0336}{1.4772}$$

$$= 2.054$$ [ಅ–6.5.12 (ii) **ನೋಡಿರಿ**]

ಅಭ್ಯಾಸ 6.5

1. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಪ್ರತಿಘಾತದ ಸ್ವರೂಪಾಂಕ ಭಾಗವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ. 31442, 34.82, 450, 4.0014, 0.581, 0.0030014.

2. $log\ 51.91 = 1.7153$ ಆದರೆ. ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪ್ರತಿಘಾತಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ. 0.000005191, 5191, 5.191, 519.1, 519100, 0.5191, 0.005191

3. ಕೆಲವು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪ್ರತಿಘಾತಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ 4.0123, 3.5173 1.0012, 0.5174, 5.4221 ಆಗಿವೆ. ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

4. ಮುಂದೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ, ಅಂದರೆ $\bar{2}.7714$, $\bar{3}.5211$, $\bar{7}.4254$, $\bar{1}.2333$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿಘಾತವಾಗುಳ್ಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿ ದಶಮಾಂಶ ಬಿಂದು ಮತ್ತು ಮೊದಲ ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಸಂಖ್ಯೆ—ಇವುಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ಶೂನ್ಯಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. ಪ್ರತಿಘಾತಗಳ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಪಯೋಗಿಸಿ, ಇವುಗಳ ಪ್ರತಿಘಾತಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ : 76.59, 0.05461, 463.57, 372.576, 0.001002, 0.00007217, 569.2379.

6. $(49)^{59}$ ಮತ್ತು $2^{12} \times 3^{28}$, ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸಿದಾಗ, ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7 2^{-12}, $(\frac{1}{2})^{1000}$, $(5.48)^{-15}$, $(0.0004215)^{5}$ – ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸಿದಾಗ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ, ದಶಮಾಂಶ ಬಿಂದುವಿನ ನಂತರ ಮತ್ತು ಮೊದಲ ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಅಂಕೆಯ ನಡುವೆ ಬರುವ ಶೂನ್ಯಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದನ್ನೂ ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿ, ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಭಾಗಗಳು ಧನವಾಗಿರುವಂತಿಡಿರಿ.

(i) $\bar{3}.2078+2.0091$ (ii) $\bar{2}.6452-1.2099$

(iii) $\bar{1}.2472-\bar{4}.2267$ (iv) $\bar{3}.6009\times 2$

(v) $\frac{\bar{4}.0012}{4}$ (vi) $\frac{\bar{5}.9729}{4}$

9. $log\ 7.16=0.8549$ ಆದರೆ. ಇವುಗಳ ಪ್ರತಿಘಾತಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ :

$\sqrt{71.6}$, $(0.00716)^{\frac{3}{4}}$, $\frac{1}{0.00716}$, $\frac{1}{\sqrt{0.716}}$

10. $log\ 2=0.30103$, $log\ 3=0.47712$ ಮತ್ತು $log\ 7=0.84509$ ಆದರೆ ಕೆಳಗಿನ ಲೆಕ್ಕಗಳಲ್ಲಿ, ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $log\ 64$ (ii) $log\ 84$ (iii) $log\ 0.128$

(iv) $log 0.0125$ (v) $log\ 14.4$ (vi) $log\ \frac{14}{3}$

(vii) $lol \sqrt[3]{12}$ (viii) $log\ \sqrt{\frac{35}{27}}$ (ix) $log \sqrt[4]{0.0105}$

11. $log\ 1948.445=3.2896883$ ಆದರೆ, 39.2 ರ ವರ್ಗದ 11 ನೆಯ ಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

12. ಕೆಳಗಿನ ಲೆಕ್ಕಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದನ್ನೂ ಪ್ರತಿಘಾತ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ, ಸುಲಭರೂಪಕ್ಕೆ ತನ್ನಿರಿ.

(i) 172.3×0.005213 (ii) $\frac{3.0336}{1.4772}$

(iii) $\frac{547.2}{\sqrt{0.01734}}$ (iv) $\frac{18.42\times 54.01}{94.76}$

(v) $\sqrt[3]{\frac{18.42 \times 54.01}{94.76}}$ (vi) $\frac{\sqrt{423.1} \times \sqrt[3]{54.70}}{(0.01756)^2}$

(vii) $(52.01)^2 - (41.78)^2$

(viii) $(3.1416 \times 0.15) \times \sqrt{\frac{456.3}{0.0653 \times 0.079}}$

(ix) $(46.23)^{\frac{2}{3}} + (0.056)^{\frac{7}{3}}$ (x) $\frac{12.8712}{\sqrt[4]{95.36}}$

(xi) $\frac{(46.23)^{\frac{2}{3}} + (0.056)^{\frac{7}{3}}}{\sqrt[4]{94.36}}$

13. ಇವುಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿರಿ : (i) $100 < \left(\frac{21}{20}\right)^{100}$

(ii) $\left(\frac{71}{70}\right)^{1000} > 100,00,00$.

14. ಕೆಳಗಿನ ಅಸಮತ್ವಗಳು ಯುಕ್ತವಾಗುವಂತೆ n ದ ಕನಿಷ್ಠ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $\left(\frac{1}{2.87}\right)^n < 0.0001$. (ii) $\left(\frac{1}{5.431}\right)^n < 0.0001$

(iii) $\left(\frac{1}{3.83}\right)^n < 0.00001$.

15. $\log_2 [\log_3 \{\log_4 n\}] = 2$ ಆದರೆ, n ನಲ್ಲಿ 49 ಅಂಕೆಗಳಿವೆ ಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

16. $\log_{10}2 = \log 0.3010$, $\log_{10}3 = 0.4771$ ಆದರೆ, $\log_{40}12$ ವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

17. $\log_{10}2 = 0.30103$, $\log_{10}7 = 0.84509$ ಆದರೆ, $\log_7 \sqrt{2}$ ಮತ್ತು $\log_{\sqrt{2}} 7$ ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

18. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲೂ, x ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಎರಡು ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳ ವರೆಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $3^{x-2} = 5$. (ii) $5^x = 21$. (iii) $3^{x-1} = 2^{x+1} \times 2$

(iv) $\log_x 12.4 = 0.25$ (v) $3^{x+y} = 27$ ಮತ್ತು $2^{x-y} = 5$.

—

7

ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳು

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಬರುವ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿನ ಚರಾಕ್ಷರಗಳ ಗುಣಕಗಳೆಲ್ಲವೂ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯೆಂದು ಭಾವಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ $ax^2+bx+c = a'.x^2+b'x+c'$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ, a, b, c, a', b' ಮತ್ತು c' ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದೂ ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

7.1 ವ್ಯಾಖ್ಯೆ : x ಎಂಬ ಏಕ ಚರಾಕ್ಷರವಿರುವ ಸಮೀಕರಣ $ax+b=o$, $(a \neq o)$ ವನ್ನು **ಸರಳ ಸಮೀಕರಣ**ವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. x ದ ಯಾವ ಬೆಲೆಗೆ ಈ ಸಮೀಕರಣವು ನಿಜವಾಗುತ್ತದೊ, ಆ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ $a\alpha+b=o$ ಆದಾಗ α ವು $ax+b=o$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲವೆಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ. ಅಂತಹ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ α ವು $ax+b=o$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು **ಯುಕ್ತಗೊಳಿಸುತ್ತದೆ** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

7.2 ಪ್ರಮೇಯ: $ax+b=o$ $(a \neq o)$ ಸಮೀಕರಣವು ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಪಡೆದಿರಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

ಸಾಧನೆ : ಸಾಧ್ಯವಾದರೆ α, β ಗಳು ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಯುಕ್ತಗೊಳಿಸುತ್ತವೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ.

$$\therefore \quad a\alpha+b=o \Rightarrow^{*} a\alpha=-b \Rightarrow \alpha=-\frac{b}{a}$$

ಮತ್ತು $a\beta+b=o \Rightarrow a\beta=-b \Rightarrow \beta=-\frac{b}{a}$

$\therefore \quad \alpha=\beta=-\frac{b}{a}$ $\therefore$ ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣವು ಏಕೈಕ ಮೂಲವನ್ನು ಪಡೆದಿದೆ. ಆ ಮೂಲ $= -\frac{b}{a}$.

* "⇒" ಈ ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು 'ಎಂದರೆ' ಎಂದು ಓದಿಕೊಳ್ಳಿರಿ

7.3 **ವ್ಯಾಖ್ಯೆ** : $ax^2+bx+c=o$, $(a \neq o)$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು **ಸಾಮಾನ್ಯ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣವೆಂದು** ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದರಲ್ಲಿ ಬರುವ a, b ಗಳನ್ನು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ x^2 ಮತ್ತು x ಎಂಬುದರ **ಗುಣಕಗಳೆಂದೂ** ಮತ್ತು c ಯನ್ನು **ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆಯೆಂದೂ** ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಈಗ ಸಾಮಾನ್ಯ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ

$$ax^2+bx+c=o, \ (a \neq o) \qquad (7.3.1)$$

ಎಂಬುದರ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಪಡೆಯೋಣ. ಇದಕ್ಕಾಗಿ ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಎರಡು ಬದಿಗಳನ್ನು a ದಿಂದ ಭಾಗಿಸೋಣ.

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=o$$

ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಎರಡು ಬದಿಗೆ $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ ಎಂಬುದನ್ನು ಕೂಡೋಣ. ಇದರಿಂದ :

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\Rightarrow \left\{x^2+2(x)\left(\frac{b}{2a}\right)+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\}+\frac{c}{a}=\frac{b^2}{4a^2}$$

$$\Rightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$\therefore \quad x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$\Rightarrow \quad x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

ಆದ್ದರಿಂದ (7.3.1) ರ ಮೂಲಗಳು α, β ಗಳಾದರೆ, ಅವುಗಳ ಬೆಲೆ

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= -\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ \text{ಮತ್ತು} \quad \beta &= -\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (7.3.2)$$

ಎಂಬುದನ್ನು ನೆನಪಿಸಲ್ಲಿಡೋಣ.

7.4 ಟೀಕೆ : ಈಗ (7.3.1) ರ **ಮೂಲಗಳ** ಮೊತ್ತ ಮತ್ತು ಗುಣಲಬ್ಧ ಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಲು ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಪಡೆಯೋಣ.

ಮೂಲಗಳ ಮೊತ್ತ $= \alpha+\beta = -\frac{b}{2a} + \frac{^{-}b}{2a}$ [(7.3.2) ರಿಂದ]

$$= -\frac{b}{a}$$

$$= -\left(\frac{x \text{ ನ ಗುಣಕ}}{x^2 \text{ ನ ಗುಣಕ}}\right)$$

ಮೂಲಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $= \alpha\beta$

$$= \left(\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(-\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$$

$$= \left(-\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2$$

$$= \frac{b^2}{(2a)^2} - \frac{\sqrt{b^2-4ac}^{\,2}}{(2a)^2}$$

$$= \frac{b^2}{4a^2} - \frac{(b^2-4ac)}{4a^2}$$

$$= \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}$$

$$= \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a} = \left(\frac{\text{ಸ್ಥಿರಸಂಖ್ಯೆ}}{x \text{ ನ ಗುಣಕ}}\right)$$

ಆದ್ದರಿಂದ :

ಮೂಲಗಳ ಮೊತ್ತ $= -\left(\frac{x \text{ ನ ಗುಣಕ}}{x^2 \text{ ನ ಗುಣಕ}}\right)$ ... (7.4.1)

ಮೂಲಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $= -\left(\frac{\text{ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆ}}{x \text{ ನ ಗುಣಕ}}\right)$ ... (7.4.2)

7.5 ಉದಾ : $2x^2-5x+2=o$ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸೋಣ ಮತ್ತು (7.4.1), (7.4.2) ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ತಾಳೆ ನೋಡೋಣ.

ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ: $a=x^2$ ನ ಗುಣಕ $=\ 2,$

$b=x$ ನ ಗುಣಕ $=-5,$

ಮತ್ತು $c=$ ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆ $=\ 2.$ ಈ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು (7.3.2) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸುವದರಿಂದ :

$$x=\frac{-(-5)}{2(2)}+\frac{\sqrt{(-5)^2-4(2)(2)}}{2(2)}$$

$$=\frac{5}{4}+\frac{\sqrt{25-16}}{4}=\frac{5}{4}+\frac{\sqrt{9}}{4}=\frac{5}{4}+\frac{3}{4}$$

$$\therefore \alpha=\frac{5}{4}+\frac{3}{4} \text{ ಮತ್ತು } \beta=\frac{5}{4}-\frac{3}{4}$$

$$=2 \quad ; \quad =\frac{1}{2}$$

$\therefore$ ಮೂಲಗಳ ಮೊತ್ತ $=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}=-\left(\frac{-5}{2}\right)$

$=-\left(\frac{x \text{ ನ ಗುಣಕ}}{x^2 \text{ ನ ಗುಣಕ}}\right)$

ಮೂಲಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $=2\times\frac{1}{2}=1=\left(\frac{2}{2}\right)$

$=\left(\frac{\text{ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆ}}{x^2 \text{ ನ ಗುಣಕ}}\right)$

7 6 ಟೀಕೆ : ಮೇಲಿನ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸುವ ಕ್ರಮದಿಂದಲೂ ಸಹ ಬಿಡಿಸ ಬಹುದೆಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ. ಈಗ :

$$2x^2-5x+2=o$$

$$\Rightarrow\ 2x^2-4x-x+2=o$$

$$\Rightarrow\ (2x.x-2.2x)-1.x+1.2=o$$

$$\Rightarrow\ 2x(x-2)-1.(x-2)=o$$

$$\Rightarrow\ (2x-1)(x-2)=o$$

$\Rightarrow \quad 2x-1=o$ ಅಥವಾ $x-2=o$

$\Rightarrow x=\frac{1}{2}$ ಅಥವಾ $x=2$

7.7 ಪ್ರಮೇಯ : α, β ಗಳು (7.3.1)ರ ಮೂಲಗಳಾದಾಗ $ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta)$.

ಬಲಬದಿ $= a(x-\alpha)(x-\beta)$

$= a\{x^2-x(\alpha+\beta)+\alpha\beta\}$

$= a\left\{x^2-x\left(\frac{-b}{a}\right)+\frac{c}{a}\right\}$ [(7.4.1), (7.4.2) ರಿಂದ]

$= a\left(x^2+x\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right)$

$= ax^2+bx+c=$ ಎಡಬದಿ

$\therefore \quad ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta)$ (7.7.1)

7.8 ಪ್ರಮೇಯ : ಸಾಮಾನ್ಯ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ (7.3.1) **ರ ಮೂಲಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಎರಡೇ ಎರಡು.**

ಸಾಧನೆ : ಸಾಧ್ಯವಾದರೆ, α, β ಮತ್ತು γ ಗಳು

$$ax^2+bx+c=o, \ (a\neq o) \qquad (7.3.1)$$

ದ ಮೂಲಗಳೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಈಗ $\gamma=\alpha$ ಅಥವಾ $\gamma=\beta$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಪೂರ್ತಿ ಮಾಡುತ್ತೇವೆ. ಇದಕ್ಕಾಗಿ (7.7.1) ರ ಎರಡು ಬದಿಯಲ್ಲೂ $x=\gamma$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸೋಣ. ಆಗ,

$$a\gamma^2+b\gamma+c=a(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)$$

γ ವು (7.3.1) ರ ಮೂಲವೆಂದು ಭಾವಿಸಿರುವುದರಿಂದ, ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಎಡಬದಿ $=o$ [ಏಕೆ ?]

$$\therefore \quad o=a(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta).$$

$a\neq o$ ಇರುವುದರಿಂದ : $(\gamma-\alpha)=o$ ಅಥವಾ $\gamma-\beta=o$

$\Rightarrow \gamma=\alpha$ ಅಥವಾ $\gamma=\beta$

7.9 ವ್ಯಾಖ್ಯೆ : $f(\alpha, \beta)$ ಸಂಬಂಧಕದ ಬೆಲೆ α, β ಗಳನ್ನು ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡಿದಾಗ ಬದಲಾಗದಿದ್ದರೆ (ಅಂದರೆ ಮೊದಲ ಬೆಲೆಯನ್ನೇ ಪಡೆದರೆ) $f(\alpha\ \beta)$ ಎಂಬುದನ್ನು **ಸಮಾಂಗ ಸಂಬಂಧಕವೆಂದು** ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

7.10 ಟೀಕೆ: $f(\alpha, \beta)$ ವು ಒಂದು ಸಮಾಂಗ ಸಂಬಂಧಕವಾದಾಗ, $f(\alpha, \beta) = f(\beta, \alpha)$ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ. $\alpha + \beta$, $\alpha\beta$, $\alpha^2 + \beta^2$, ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದೂ, α ಮತ್ತು β ಗಳಲ್ಲಿ ಸಮಾಂಗ ಸಂಬಂಧಕಗಳಾಗಿವೆ. $(\alpha^2 + \beta)$ ಎಂಬುದು ಸಮಾಂಗ ಸಂಬಂಧಕವಲ್ಲ (ಏಕೆ?). (7.4.1) ಮತ್ತು (7.4.2)ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಪಯೋಗಿಸಿ ದತ್ತ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳ ಸಮಾಂಗ ಸಂಬಂಧಕಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು.

ಉದಾ : α, β ಗಳು (7.3.1)ರ ಮೂಲಗಳೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ.

(i)
$$\begin{aligned}\alpha^2 + \beta^2 &= \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - 2\alpha\beta \\ &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \\ &= \left(\frac{-b}{a}\right)^2 - \frac{2c}{a} \quad \ldots[(7.4.1),\ (7.4.2)\text{ರಿಂದ}]\end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned}\alpha^3 + \beta^3 &= \{\alpha^3 + \beta^3 + 3\alpha\beta(\alpha + \beta)\} - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) \\ &= \{\alpha + \beta\}^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) \quad \ldots\ [\text{ಏಕೆ?}] \\ &= \left(\frac{-b}{a}\right)^3 - 3\,\frac{c}{a}\left(\frac{-b}{a}\right) \\ &= \frac{-b^3}{a^3} + \frac{3cb}{a^2} = \frac{-b^3 + 3abc}{a^3}\end{aligned}$$

(iii)
$$\begin{aligned}\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha} &= \frac{(\alpha^3 + \beta^3)}{\beta\alpha} = \left(\frac{-b^3 + 3abc}{a^3}\right) \Big/ \frac{c}{a} \\ &= \frac{-b^3 + 3abc}{a^3} \times \frac{a}{c} \\ &= \frac{-b^3 + 3abc}{a^2c}\end{aligned}$$

(iv)
$$\begin{aligned}\alpha^4 + \beta^4 &= \{(\alpha^2)^2 + (\beta^2)^2 + 2\alpha^2\beta^2\} - 2\alpha^2\beta^2 \\ &= (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2(\alpha\beta)^2 \\ &= \left(\frac{b^2 - 2ac}{a^2}\right)^2 - 2\left(\frac{c}{a}\right)^2 \quad \ldots[7.10\text{ ಟೀಕೆ (i) ರಿಂದ}] \\ &= \frac{b^4 - 4b^2ac + 4a^2c^2}{a^4} - \frac{2c^2}{a^2}\end{aligned}$$

$$= \frac{b^4 - 4b^2ac + 2a^2c^2}{a^4}$$

(v) $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$

$$= (\alpha+\beta)\sqrt{(\alpha-\beta)^2}$$

$$= (\alpha+\beta)\sqrt{\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2}$$

$$= (\alpha+\beta)\sqrt{(\alpha^2 + 2\alpha\beta^2 + \beta^2) - 4\alpha\beta}$$

$$= (\alpha+\beta)\sqrt{(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta}$$

$$= \left(\frac{-b}{a}\right)\sqrt{\left(\frac{-b}{a}\right)^2 - 4\left(\frac{c}{a}\right)}$$

$$= \frac{-b}{a}\sqrt{\frac{b^2}{a^2} - \frac{4c}{a}}$$

$$= \frac{-b}{a}\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{a^2}}$$

$$= \frac{-b}{a}\,\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a} = -b\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a^2}$$

ಅಭ್ಯಾಸ 7.1

1. ಇವುಗಳು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಹೌದೇ, ಅಲ್ಲವೇ, ನಿರ್ಧರಿಸಿರಿ.

 (i) $2x^2+3x+7=0$. (ii) $x^2=9$.

 (iii) $2x^2+3x+5=16x^2-7x+7$.

 (iv) $2x^2+3x+1=(2x+1)(x-1)$.

 (v) $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$.

2. ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.

 (i) $x^2-5x+6=o$. (ii) $2x^2-7-5x=o$.

 (iii) $15x^2+32=44x$. (iv) $2(x^2+1)+7x=o$.

 (v) $5x^2-3x=3(2x-1)$. (vi) $3x^2=11x+4$.

 (vii) $12x^2-24=23x$.

3. α, β ಗಳು $x^2-qx+r=o$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳಾದ: ಇವುಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $\alpha^2+\beta^2$. (ii) $\alpha^3+\beta^3$. (iii) $\frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\beta^2}{\alpha}$.

(iv) $\alpha^4+\beta^4$. (v) $\alpha^2-\beta^2$. (vi) $\alpha^3-\beta^3$.

(vii) $\frac{\alpha^3}{\beta}+\frac{\beta^3}{\alpha}$. (viii) $\frac{1}{\alpha+2\beta}+\frac{1}{\beta+2\alpha}$.

(ix) $\alpha^2\beta+\beta^2\alpha$. (x) $\alpha^4+\alpha^2\beta^2+\beta^4$.

(xi) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}$. (xii) $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}$.

(xiii) $\frac{\alpha^2}{\beta}-\frac{\beta^2}{\alpha}$. (xiv) $\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)$.

(xv) $\frac{1-\alpha}{1+\alpha}+\frac{1-\beta}{1+\beta}$. (xvi) $\frac{1}{(\alpha-q)^2}+\frac{1}{(\beta-q)^2}$.

α, β ಗಳು $3x-6x+4=0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳಾದರೆ.
$\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{x}\right)+2\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)+3\alpha\beta=8$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

5. α, βಗಳು $x^2+px+q=0$ ಎಂಬಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳಾದರೆ,
$\frac{(p+\alpha)}{(q-\alpha)^2}\frac{(p+\beta)}{(q-\beta)^2}=\frac{1}{4q-p^2}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

6. a, bಗಳು $(x-p)(x-q)=r$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳಾದರೆ,
$(2a-b)(2b-a)=(2p-q)(2q-p)-qr$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

---

7 11 ಮೂಲಗಳ ಸ್ವಭಾವಗಳು : ಸಾಮಾನ್ಯವರ್ಗಸಮೀಕರಣ (7.3.1)ರ

$$ax^2+bx+c=o, \ (a\neq o) \quad \ldots \quad (7.3.1)$$

ಮೂಲದ ಸ್ವಭಾವಗಳು b^2-4ac ಎಂಬ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸಿದೆಯೆಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ [ಏಕೆ ? (7.3.2) ನೋಡಿರಿ]. ಆದ್ದರಿಂದ Δ [ಡೆಲ್ಟ ಎಂದು ಓದಿರಿ.] ಎಂಬ ಸಂಕೇತದಿಂದ ಸೂಚಿಸುವ

$$\Delta=b^2-4ac \quad \ldots \quad (7.11.1)$$

ಎಂಬ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯನ್ನು (7.3.1)ರ **ಶೋಧಕ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. (7.3.1)ರ ಮೂಲಗಳು α, β ಗಳಾದರೆ,

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \\ \text{ಮತ್ತು} \quad \beta &= \frac{-b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \end{aligned}\right\} \quad \dots \dots \quad (7.3.2)$$

ಎಂಬುದನ್ನು ಈ ಹಿಂದೆಯೇ ಕಂಡಿದ್ದೇವೆ.

(i) **ಸಂದರ್ಭ 1 :** $\Delta = b^2 - 4ac > o$ ಎನ್ನೋಣ. ಈಗ $\sqrt{\Delta}$ ವು ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ. ಆದ್ದರಿಂದ (7.3.2) ರಲ್ಲಿ ಬಲಬದಿಗಳು, ಅಂದರೆ ಮೂಲಗಳು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ **ಶೋಧಕವು ಧನವಾದಾಗ, ಮೂಲಗಳು ವಾಸ್ತವ** ಮತ್ತು **ಪ್ರತ್ಯೇಕ** ಎಂಬುದನ್ನು ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡೋಣ.

(ii) **ಸಂದರ್ಭ 2 :** $\Delta = b^2 - 4ac = o$ ಎನ್ನೋಣ. ಈಗ (7.3.2) ರಲ್ಲಿ ಬಲಬದಿಗಳು ಸಮನಾಗುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $\alpha = \beta = \frac{-b}{2a}$ = ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ. ಆದ್ದರಿಂದ **ಶೋಧಕವು ಶೂನ್ಯವಾದಾಗ ಮೂಲಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮನಾಗಿಯೂ ವಾಸ್ತವವಾಗಿಯೂ** ಇರುತ್ತವೆಂಬುದನ್ನು ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡೋಣ.

ಈಗ $ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)(x-\beta)$ ... [ಏಕೆ?]

$= a(x-\alpha)(x-\alpha)$ ... [ಏಕೆ?]

$= a(x-\alpha)^2$

$= \{\sqrt{a}\,(x-\alpha)\}^2$

= ಪೂರ್ಣವರ್ಗ.

ಆದ್ದರಿಂದ **ಶೋಧಕವು ಶೂನ್ಯವಾದಾಗ,** [ಅಂದರೆ, $\Delta = b^2 - 4ac = o$] **ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ವರ್ಗಸಂಬಂಧಕವು** [ಅಂದರೆ, $ax^2 + bx + c = o$] ಒಂದು **ಪೂರ್ಣವರ್ಗವಾಗುತ್ತದೆ.**

(iii) **ಸಂದರ್ಭ 3 :** $\Delta = b^2 - 4ac < o$ ಎನ್ನೋಣ. ಈಗ $\sqrt{\Delta}$ ವು ಒಂದು ಊಹ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗುತ್ತದೆ [ಏಕೆ?]. ಆದ್ದರಿಂದ (7.3.2)ರ ಬಲಬದಿಗಳು, ಅಂದರೆ ಮೂಲಗಳು $\left(\frac{-b}{2a} \neq \right.$ ಊಹ್ಯಸಂಖ್ಯೆ $\left. \right)$ ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ **ಶೋಧಕ ಋಣವಾದಾಗ, ಮೂಲಗಳು ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿಯೂ** ಮತ್ತು **ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿಯೂ** ಇರುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡೋಣ.

(iv) **ಸಂದರ್ಭ 4 :** $\triangle = p^2$ = ಪೂರ್ಣವರ್ಗ ಎನ್ನೋಣ. ಈಗ $\sqrt{\triangle} = \sqrt{p^2} = p$ ಆದ್ದರಿಂದ $a, b, c,$ **ಗಳು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದಾಗ** (7.3.2)ರ ಬಲಬದಿಗಳು, ಅಂದರೆ **ಮೂಲಗಳು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗುತ್ತವೆ.**

7.12 **ಉದಾ :** ಮುಂದೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣಗಳ ಮೂಲಗಳ ಸ್ವಭಾವಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯೋಣ.

(i) $7x^2 + x + 1 = o$. ಇದರಲ್ಲಿ $a = 7, \quad b = 1, \quad c = 1,$

$\therefore \quad \triangle = b^2 - 4ac = 1^2 - 4.7.1 = -27 < o$

ಶೋಧಕವು ಋಣ ಇರುವುದರಿಂದ, ಮೂಲಗಳು ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಇರುತ್ತವೆ. .... [7.11−(iii) ನೋಡಿರಿ.]

(ii) $5x^2 - 3x - 2 = o$. ಇದರಲ್ಲಿ, $a = 5, b = -3, \; c = -2$

$\therefore \quad \triangle = (-3)^2 - 4(5)(-2) = 9 + 40$

$= 49 = 7^2$ = ಪೂರ್ಣವರ್ಗ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಮೂಲಗಳು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಇರುತ್ತವೆ. [7.11 (iv) ನೋಡಿರಿ.]

(iii) $(l^2 + m^2)(x^2 + 1) + 2\,(l^2 - m^2)x = o$. ಇದರಲ್ಲಿ,

$a = l^2 + m^2, b = 2\,(l^2 - m^2), \; c = l^2 + m^2$. [ಏಕೆ?]

$\therefore \triangle = \{2\,(l^2 - m^2)\}^2 - 4\,(l^2 + m^2)\,(l^2 + m^2)$

$= 4\,(l^4 - 2l^2m^2 + m^4) - 4\,(l^4 + 2l^2m^2 + m^4)$

$= 4\,(-2l^2m^2 - 2l^2m^2)$

$= 4\,(-4l^2m^2) = -(16l^2m^2)$

$= -(4lm)^2 =$ ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆ [ಏಕೆ?]. ಆದ್ದರಿಂದ, ಮೂಲಗಳು ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು ಪ್ರತ್ಯೇಕ ಇರುತ್ತವೆ.

7·13 **ಉದಾ :** $ax^2 + bx + c = o$. ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು ವಾಸ್ತವವಾದಾಗ, $ax^2 + (\,b - l\,)\,x + c = \frac{2b-1}{4a}$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು ಕೂಡ ವಾಸ್ತವವೆಂದು ತೋರಿಸೋಣ.

ದತ್ತ : $b^2 - 4ac > o$ ... (i)

$$ax^2 + (b-1)\,x + c = \frac{2b \quad 1}{4a} \quad \ldots \qquad \text{(ii)}$$

$\Rightarrow \quad 4a^2x^2+4a(b-1)x+4ac=2b-1$

$\Rightarrow \quad 4a^2x^2+(4ab-4a)\ x+4ac-2b+1=o$

ಇದರಲ್ಲಿ ಶೋಧಕ $= (4ab-4a)^2-4(4a^2)\ (4ac-2b+1)$

$= (4a)^2(b-1)^2-(4a)^2(4ac-2b+1)$

$= (4a)^2\{(b-1)^2-(4ac-2b+1)$

$= (4a)^2\{(b^2-2b+1)-(4ac-2b+1)\}$

$=(4a)^2\{b^2-4ac\}$

$=(4a)^2(>o)$ . . [(i) ರಿಂದ]

= ಧನ ಆದ್ದರಿಂದ (ii) ರ ಮೂಲಗಳು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

ಅಭ್ಯಾಸ 7.2

1. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಮೂಲಗಳ ಸ್ವಭಾವಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $2x^2+3x+1=o$. (ii) $7x^2+x-1=o$.

(iii) $4x^2+112=5x$. (iv) $ax^2+(b+a)x-b=o$.

2. ಕೆಳಗಿನ ಲೆಕ್ಕಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದನ್ನೂ ಸಮರ್ಥಿಸಿರಿ.

(i) a ಮತ್ತು b ಗಳು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದಾಗ, $x^2-2(1-a)x+(1-a)^2=b^2$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳೂ ಕೂಡ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

(ii) l, m ಗಳು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೆ, $(l^2-m^2)x^2+2(l^2+m^2)x+l^2-m^2=o$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳೂ ಕೂಡ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

(iii) $(q^2-pr)\ x^2+2\ (p+r)\ x-4=o$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು. p, q ಮತ್ತು r ಗಳ ಎಲ್ಲ ವಾಸ್ತವ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ, ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

(iv) $a=b$ ಆದರೆ ಮತ್ತು ಆದಾಗ ಮಾತ್ರ, $2x^2-2(a+b)x+(a^2+b^2)=o$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

(v) $(x+1)(x-3)-\lambda\ (x-2)(x-3)=o$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು λದ ಎಲ್ಲ ವಾಸ್ತವ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

3. $(p^2+q^2)x^2+2\ (pr+qs)x+(r^2+s^2)\ =o$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು ಪರಸ್ಪರ ಸಮ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿ, ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.

4. $x^2-2\lambda x+\lambda^2-\mu^2-\gamma^2=o$ ಮತ್ತು $(l-m+n)x^2+4(l-m)x+(l-m-n)=o$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

7.15 ದತ್ತ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಕ್ರಮ : ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಕ್ರಮವನ್ನು ಆಗಲೇ ಕಂಡು ಹಿಡಿದಿದ್ದೇವೆ. ಈಗ ವಿಲೋಮ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ಕುರಿತು ಚರ್ಚಿಸೋಣ; ಅಂದರೆ, α, β ಗಳು ಯಾವುದೇ ಎರಡು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದರೆ, ಇವುಗಳನ್ನು ಮೂಲಗಳನ್ನಾಗಿ ಪಡೆದಿರುವ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣವನ್ನು ರಚಿಸುವ ಕ್ರಮವನ್ನು ಈಗ ವಿವರಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇದಕ್ಕಾಗಿ,

$$x^2-(\alpha+\beta)\ x+\alpha\beta=o \quad \ldots \quad (7.15.1)$$

ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. ಇದರ ಎಡಬದಿಯಲ್ಲಿ $x=\alpha$ ಆದೇಶಿಸೋಣ. ಇದರಿಂದ :

$$\alpha^2-(\alpha+\beta)\ \alpha+\alpha\beta=o$$

ಆದ್ದರಿಂದ, α ವು (7.15.1)ರ ಮೂಲವಾಗಿದೆ. ಇದೇ ರೀತಿ β ವು ಕೂಡ (7.15.1)ರ ಮೂಲವೆಂಬುದನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ತಾಳೆನೋಡಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ, α, β ಗಳನ್ನು ಮೂಲಗಳನ್ನಾಗಿ ಪಡೆದಿರುವ ಸಮೀಕರಣವು (7.15.1) ಎಂಬುದು ಮನದಟ್ಟಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ದತ್ತ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಪಡೆದಿರುವ ವರ್ಗಸಮೀಕರಣವನ್ನು ರಚಿಸಲು ಈ ಸೂತ್ರವನ್ನು ನಿರೂಪಿಸುತ್ತೇವೆ.

$$x^2 - (\text{ಮೂಲಗಳ ಮೊತ್ತ})\ x + \text{ಮೂಲಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ} = o \ldots (7.15.2)$$

7.16 ಉದಾ: (i) $3\frac{1}{2}$, $4\frac{1}{2}$ ಗಳನ್ನು ಮೂಲಗಳಾಗಿ ಪಡೆದಿರುವ ಸಮೀಕರಣ:

$$x^2-\left(3\frac{1}{2}+4\frac{1}{2}\right)x+\left(3\frac{1}{2}\right)\times\left(4\frac{1}{2}\right)=o \quad \cdots[(7.15.2)\text{ರಿಂದ}]$$

ಅಥವಾ : $x^2-8x+15.75=0$

(ii) $\sqrt{7}+\sqrt{5}$ ಮತ್ತು $\sqrt{7}-\sqrt{5}$ ಗಳನ್ನು ಮೂಲಗಳನ್ನಾಗಿ ಪಡೆದಿರುವ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಈಗ ರಚಿಸೋಣ.

ಬೇಕಾದ ಸಮೀಕರಣ : $x^2 - Px + Q = o$ ಆದರೆ, ಇಲ್ಲಿ $P =$ ಮೂಲಗಳ ಮೊತ್ತ $= (\sqrt{7} + \sqrt{5}) + (\sqrt{7} - \sqrt{5})$

$= 2\sqrt{7},$

ಮತ್ತು Q = ಮೂಲಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ

$= (\sqrt{7} + \sqrt{5})\ (\sqrt{7} - \sqrt{5})$

$= \sqrt{7}^2 - \sqrt{5}^2 = 7 - 5 = 2.$

ಆದ್ದರಿಂದ ಬೇಕಾಡ ಸವಿಾಕರಣ:

$$x^2 - 2\sqrt{7}\,x + 2 = o.$$

(iii) $\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ ಎಂಬ ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಮೂಲಗಳನ್ನಾಗಿ ಪಡೆದಿರುವ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ರಚಿಸೋಣ.

ಈಗ $\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2} + \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2} = \dfrac{-1+i\sqrt{3}-1-i\sqrt{3}}{2}$

$$= \frac{-2}{2} = -1$$

ಮತ್ತು $\left(\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)$

$$= \frac{(-1)^2-(i\sqrt{3})^2}{2^2} = \frac{1-i^2.3}{4} = \frac{1-(-1).3}{4}$$

$$= \frac{1+3}{4} = 1$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಬೇಕಾದ ಸಮೀಕರಣ :

x^2 – (ಮೂಲಗಳ ಮೊತ್ತ) x + ಮೂಲಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ $= o.$

$x^2 - (-1)x + 1 = o$ ಅಥವಾ, $x^2 + x + 1 = o.$

7.17 ಉದಾ : α ಮತ್ತು β ಗಳು, $x^2 - px + q = o$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳಾದರೆ, $\alpha + 2\beta$, $\beta + 2\alpha$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಮೂಲಗಳಾಗಿ ಪಡೆದಿರುವ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ರಚಿಸೋಣ.

$x^2 - px + q = o$ದ ಮೂಲಗಳು α, β ಇರುವದರಿಂದ :

$$\alpha+\beta = -\left(\frac{-p}{1}\right)=p;\quad \alpha\beta=\left(\frac{q}{1}\right)=q$$

ಈಗ ಬೇಕಾದ ಸಮೀಕರಣ : $x^2-Px+Q=O$ ಆದರೆ,

$$P=\alpha+2\beta+\beta+2\alpha=3\alpha+3\beta=3(\alpha+\beta)=3p,$$

ಮತ್ತು $Q=(\alpha+2\beta)(\beta+2\alpha)=\alpha\beta+2\alpha^2+2\beta^2+4\alpha\beta$

$$=\alpha\beta+2(\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta)=\alpha\beta+2(\alpha+\beta)^2$$

$$=q+2(p)^2.$$

$\therefore$ ಬೇಕಾದ ಸಮೀಕರಣ : $x^2-3px+q+2p^2=o.$

7·18 ಪ್ರಮೇಯ : ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ (7.3.1)ರ ಒಂದು ಮೂಲವು ಶೂನ್ಯವಾದರೆ, $c=o$ ಮತ್ತು ಎರಡೂ ಮೂಲಗಳು ಶೂನ್ಯವಾದರೆ, $c=o$ ಮತ್ತು $b=o$ ಎಂಬ ನಿರ್ಬಂಧಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಯುಕ್ತವಾಗುತ್ತವೆ.

ಸಾಧನೆ : $ax^2+bx+c=o$ ...... (7·3·1)

ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಒಂದು ಮೂಲ ಶೂನ್ಯವಾದರೆ,

$$a.o^2+b{\cdot}o+c=o \text{ ಅಥವಾ } c=o.$$

ಈಗ $c=o$ ಎಂದು (7.3.1) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸುವುದರಿಂದ :

$$ax^2+bx=o \Rightarrow x(ax+b)=o$$

$$\Rightarrow x=o \text{ ಅಥವಾ } ax+b=o.$$

$$\Rightarrow x=\frac{-b}{a}$$

ಆದ್ದರಿಂದ (7.3.1)ರ ಒಂದು ಮೂಲವು ಶೂನ್ಯವಾದಾಗ, ಮತ್ತೊಂದು ಮೂಲವು $\frac{-b}{a}$ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ. ಸಮೀಕರಣದ ಎರಡು ಮೂಲಗಳು ಶೂನ್ಯ ಆದಾಗ, $c=o$ ಮತ್ತು $\frac{-b}{a}=o.$ ಅಂದರೆ $c=o$ ಮತ್ತು $b=o$ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ.

7.19 ಉದಾ : $ax^2+bx+c=o$ ಮತ್ತು $a^1x^2+b^1y+c^1=o$ $[a\neq o\neq a^1$ ಮತ್ತು $ab^1\neq a^1b]$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಒಂದು ಮೂಲವು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಲು ಇರಬೇಕಾದ ನಿರ್ಬಂಧ :

$(ac^1-a^1c)^2=(a^1b-ab^1)(cb^1-c^1b)$, ಎಂದು ಸಾಧಿಸೋಣ.

ಸಾಧನೆ : αವು ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಮೂಲವೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. ಇದರಿಂದ :

$$a\alpha^2+b\alpha+c=o \quad \cdots \quad (i)$$
$$a^1\alpha^2+b^1\alpha+c^1=o \quad \cdots \quad (ii)$$

$a^1\times(i)$: ಇದರಿಂದ : $a^1a\alpha^2+a^1b\alpha+a^1c=o.$
$a\times(ii)$: ಇದರಿಂದ : $aa^1\alpha^2+ab^1\alpha+ac^1=o.$ } ಕಳೆಯೋಣ

$$a^1b\alpha-ab^1\alpha+a^1c-ac^1=o$$
$$\Rightarrow \quad \alpha(a^1b-ab^1)=ac^1-a^1c$$
$$\therefore \quad \alpha=\frac{ac^1-a^1c}{a^1b-ab^1} \quad \cdots \quad (6.18.1)$$

(i) ರಿಂದ : $a\alpha^2=-c-b\alpha$

$$=-c-b\frac{(ac^1-a^1c)}{a^1b-ab^1} \quad \cdots \text{[(6.18.1) ರಿಂದ]}$$
$$=\frac{-c(a^1b-ab^1)-b(ac^1-a^1c)}{a^1b-ab^1}$$
$$=\frac{cab^1-bac^1}{a^1b-ab^1}=\frac{a(cb^1-c^1b)}{a^1b-ab^1}$$
$$\Rightarrow \quad \alpha^2=\frac{cb^1-c^1b}{a^1b-ab^1} \quad \cdots \quad (6.18\ 2)$$

(6.18.1) ರಲ್ಲಿ ಪಡೆದ α ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು (6.18.2) ರ ಎಡಬದಿಯಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸುವದರಿಂದ :

$$\left(\frac{ac^1-a^1c}{a^1b-ab^1}\right)^2=\frac{cb^1-c^1b}{a^1b-ab^1}$$
$$\Rightarrow \quad (ac^1-a^1c)^2=(a^1b-ab^1)(cb^1-c^1b)$$

—

ಅಭ್ಯಾಸ 7.3

1. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಮೂಲಗಳನ್ನಾಗಿ ಪಡೆದಿರುವ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

(i) $10, -12$. (ii) $\sqrt{2}, -\sqrt{11}$. (iii) $\sqrt{2}-\sqrt{11}, \sqrt{2}+\sqrt{11}$

(iv) $\frac{2i+\sqrt{3}}{2}, \frac{2i-\sqrt{3}}{2}$ (v) $p+\frac{1}{q}, q+\frac{1}{p}$. (vi) $a+1, a-1$.

(vii) $2+i3, 2-i3$. (viii) $p+\sqrt{p^2-q}, p-\sqrt{p^2-q}$.

(ix) $\frac{2-\sqrt{3}}{5}, \frac{2+\sqrt{3}}{5}$ (x) $3a, \frac{2}{b}$

2. $x^2-qx+r=o$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು α, β ಆದಾಗ, ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಪಡೆದಿರುವ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

(i) α^2, β^2 (ii) α^3, β^3 (iii) $\alpha\beta, \alpha-\beta$

(iv) $\alpha^2, -\beta^2$ (v) $\frac{\alpha^2}{\beta}, \frac{\beta^2}{\alpha}$. (vi) $\frac{\alpha^3}{\beta}, \frac{\beta^3}{\alpha}$

(vii) $\alpha^4+\beta^4, \alpha^2\beta^2$ (viii) α^{-2}, β^{-2} (ix) $\alpha+\frac{1}{\beta}, \beta+\frac{1}{\alpha}$

(x) $\frac{1-\alpha}{1+\beta}, \frac{1-\beta}{1+\alpha}$ (xi) $\frac{1}{(\alpha-q)^2}, \frac{1}{(\beta-q)^2}$

3. ಸಮೀಕರಣ $x^2+x+1=o$ದ ಮೂಲಗಳ ವರ್ಗಗಳನ್ನು ಮೂಲಗಳನ್ನಾಗಿ ಪಡೆದಿರುವ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

4. $a=o$ ಮತ್ತು $b=o$ ಎಂಬ ನಿರ್ಬಂಧ ಯುಕ್ತವಾದಾಗ, $ax^2+bx+c=o$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು ಅನಂತ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

5. $23x^2-93x+4=o$ ಮತ್ತು $x^2-50x+184=o$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಮೂಲವಿದೆ; ಆ ಸಾಮಾನ್ಯ ಮೂಲವನ್ನು ಮತ್ತು ಉಳಿದ ಮೂಲಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸಿರುವ ಸನ್ನಿವೇಶವು ಯುಕ್ತವಾಗಬೇಕಾದರೆ, ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣದ ಗುಣಕಗಳು ಪಾಲಿಸಬೇಕಾದ ನಿರ್ಬಂಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $2x^2-\alpha x+3=o$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮ.

(ii) $x^2-2(1-a)x+(1-a)^2=b^2$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳ ಮೊತ್ತ ಆರಕ್ಕೆ ಸಮ.

(iii) $(l+m)^2-2(1+8m)x+(1+8m)$ ಎಂಬ ವರ್ಗ ಸಂಬಂಧಕವು ಒಂದು ಪೂರ್ಣವರ್ಗ.

(iv) $x^2-px+q=o$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳ ಪ್ರಮಾಣ $3:5$.

7. $x^2+bx+ac=o$ ಮತ್ತು $x^2+cx+b=o$ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಒಂದು ಮೂಲವು ಸಾಮಾನ್ಯವಿರುವಾಗ $a+b+c=o$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ. ಈ

ಸಮೀಕರಣಗಳ ಅಸಾಮಾನ್ಯ ಮೂಲಗಳು $x^2+ax+bc=o$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣ ವನ್ನು ಯುಕ್ತಗೊಳಿಸುತ್ತವೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

8. $p=q$ ಅಥವಾ $p+q+1=o$ ಇರುವಾಗ $x^2+px+q=o$ ಮತ್ತು $x^2+qx+p=o$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಒಂದು ಮೂಲವು ಸಾಮಾನ್ಯ ಇರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

9. $x^2+lx+10=o$ ಮತ್ತು $x^2+mx-10=o$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣ ಗಳ ಒಂದು ಮೂಲವು ಸಾಮಾನ್ಯವಾದರೆ, $l^2-m^2=40$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

10. $x^2-px+q=o$ ಸಮೀಕರಣದ ಒಂದು ಮೂಲವು $x^2-lx+m=o$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದ ಒಂದು ಮೂಲದ ದ್ವಿಗುಣಕ್ಕೆ ಸಮ ಎನ್ನೋಣ. ಆಗ p,q,l ಮತ್ತು m ಗಳು ಪಾಲಿಸಬೇಕಾದ ನಿರ್ಬಂಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

11. $ax^2+bx+c=o$ ಮತ್ತು $a^1x^2+b^1x^1+c^1=o$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಮೂಲವನ್ನು ಪಡೆದಿವೆ; ಇವುಗಳ ಅಸಾಮಾನ್ಯ ಮೂಲಗಳು β,β^1 ಆದರೆ $\beta ac^1=\beta^1a^1c$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

—

7.20 ವರ್ಗ ಸಂಬಂಧಕಗಳು : ಇದುವರೆಗೆ ನಾವು ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಅಭ್ಯಸಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಇನ್ನು ಮುಂದೆ ವರ್ಗ ಸಂಬಂಧಕಗಳನ್ನು ಕುರಿತುಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡೋಣ. ಸಾಮಾನ್ಯವರ್ಗ ಸಂಬಂಧಕವನ್ನು

$$y=ax^2+bx+c,\ (a\neq o) \qquad \cdots (7.20.1)$$

ಎಂದು ಬರೆದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. (7.20.1) ರಲ್ಲಿ ಬರುವ x ಚರಾಕ್ಷರ ವಾಸ್ತವ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಪಡೆದಾಗ,ಆ ಸಂಬಂಧಕವು ಯಾವ ರೀತಿ ಬದಲಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಮುಂದೆ ಚರ್ಚೆ ಮಾಡೋಣ.

ಟೀಕೆ : $$ax^2+bx+c=o,\ (a\neq o) \qquad \cdots (7.3.1)$$

ಈ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು (7.20.1)ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ವರ್ಗ ಸಂಬಂಧ ಕದ ಅನುಗುಣ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಅಲ್ಲದೆ,

$$y=ax^2+bx+c\equiv a(x-\alpha)\ (x-\beta) \qquad \cdots (7.7.1)$$

ಎಂಬುದನ್ನು ಆಗಲೇ ಕಂಡಿದ್ದೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ α,β ಗಳು (7.3.1)ರ ಮೂಲಗ ಳೆಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ.

7.21 ಶೋಧಕ $\triangle=b^2-4ac>o$ ಇರುವಾಗ ವರ್ಗ ಸಂಬಂಧಕ (7.20.1) ರ ಬದಲಾಗುವಿಕೆ : ಸಂಬಂಧಕದ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು $a>o$ ಇರುವಾಗ ಚಿತ್ರ : 7.21.1 ರಲ್ಲೂ ಮತ್ತು $a<o$ ಇರುವಾಗ ಚಿತ್ರ : 7.21.2 ರಲ್ಲೂ ಕೊಟ್ಟಿದ್ದೇವೆ.

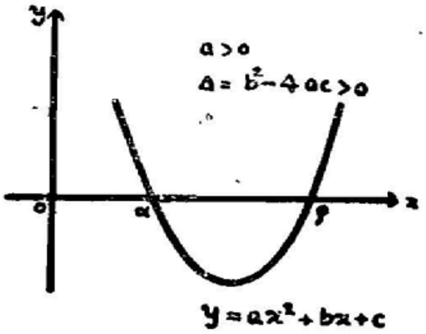
ಸಂದರ್ಭ 1 : $x < \alpha < \beta$ ಎಂದಿರಲಿ.

$\overline{\quad x \quad\quad \alpha \quad\quad \beta \quad}$

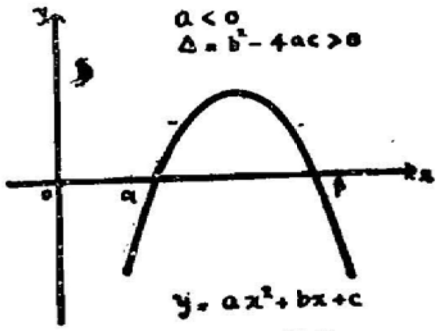
(7.7.1) ರಿಂದ : yದ ಚಿಹ್ನೆ $= a(x-\alpha)\ (x-\beta)$ ದ ಚಿಹ್ನೆ

$=$ (aದ ಚಿಹ್ನೆ) $(-)\ (-)$ .... [ಏಕೆ?]

$=$ aದ ಚಿಹ್ನೆ



ಚಿತ್ರ: 7.21.1



ಚಿತ್ರ: 7.21.2

ಸಂದರ್ಭ 2 : $\alpha < x < \beta$ ಎಂದಿರಲಿ.

$\overline{\quad \alpha \quad\quad x \quad\quad \beta \quad}$

ಈಗ yದ ಚಿಹ್ನೆ $=$ (aದ ಚಿಹ್ನೆ) $(+)(-)$

$=$ aದ ವಿರುದ್ಧ ಚಿಹ್ನೆ.

ಸಂದರ್ಭ 3 : $\alpha < \beta < x$ ಎಂದಿರಲಿ,

$\overline{\quad \alpha \quad\quad \beta \quad\quad x \quad}$

ಈಗ yದ ಚಿಹ್ನೆ $=$ (aದ ಚಿಹ್ನೆ) $(+)\ (+)$

$=$ aದ ಚಿಹ್ನೆ.

7.22 ಪ್ರಮೇಯ: $ax^2 + bx + c = o$, $(a \neq o)$ **ಸಮೀಕರಣದ ಶೋಧಕ ಧನ** $[b^2 - 4ac > o]$ **ಎನ್ನೋಣ. ಆಗ** x **ಚರಾಕ್ಷರವು ಅನುಗುಣ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವಾಗ, ದತ್ತ ವರ್ಗ ಸಂಬಂಧವು** a **ದ ವಿರುದ್ಧ ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನೂ ಮತ್ತು ಉಳಿದ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ** a **ದ ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನೂ ಪಡೆಯುತ್ತದೆ.**

7.23 ಶೋಧಕ $\Delta = b^2 - 4ac = o$ **ಇರುವಾಗ ವರ್ಗ ಸಂಬಂಧಕ** (7.20.1) **ರ ಬದಲಾಗುವಿಕೆ :**

ಈಗ $y = ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)(x-\beta)$

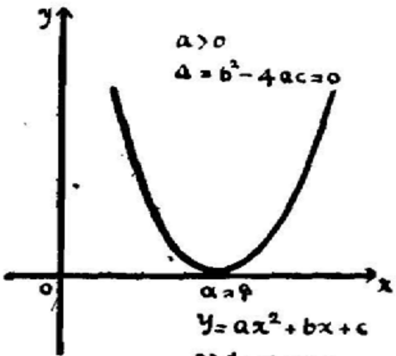
$= a(x-\alpha)(x-\alpha)$ ... [ಏಕೆ?]

$= a(x-\alpha)^2$.

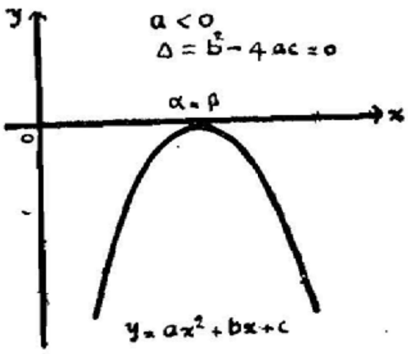
∴ yದ ಚಿಹ್ನೆ = (aದ ಚಿಹ್ನೆ) (+) ... [ಏಕೆ?]

= aದ ಚಿಹ್ನೆ.

$a>o$ ಇರುವಾಗ ಚಿತ್ರ : 7.23.1 ರಲ್ಲೂ ಮತ್ತು $a<o$ ಇರುವಾಗ ಚಿತ್ರ : 7.23.2 ರಲ್ಲೂ ದತ್ತ ಸಂಬಂಧಕದ [$\Delta = o$ ಆದಾಗ] ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಕೊಡ



ಚಿತ್ರ: 7.23.1



ಚಿತ್ರ: 7.23.2

ಲಾಗಿದೆ. ಈ ವಿಷಯವನ್ನು ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಪ್ರಮೇಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯೋಣ.

7.24 ಪ್ರಮೇಯ : ax^2+bx+c, ($a\neq o$) ಎಂಬ ವರ್ಗಸಂಬಂಧಕದ ಚಿಹ್ನೆಯು, ಶೋಧಕ ಶೂನ್ಯವಾದಾಗ, x ದ ಎಲ್ಲಾ ವಾಸ್ತವ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ a ದ ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತದೆ.

7.25 ಶೋಧಕ $\Delta = b^2-4ac<o$ ಇರುವಾಗ ವರ್ಗ ಸಂಬಂಧಕ (7.20.1) ರ ಬದಲಾಗುವಿಕೆ : ಈಗ $\Delta = -k^2$, k = ಧನ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ಬರೆಯ ಬಹುದು [ಏಕೆ?].

$$y = ax^2+bx+c$$

$$= a\left\{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right\}$$

$$= a\left\{x^2+2(x)\left(\frac{b}{2a}\right)+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right\}$$

$$= a\left\{\left(x+\frac{b}{a}\right)^2+\frac{-b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right\}$$

$$= a\left\{\left(x+\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{-b^2+4ac}{4a^2}\right\}$$

$$= a\left\{\left(x+\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{-(b^2-4ac)}{4a^2}\right\}$$

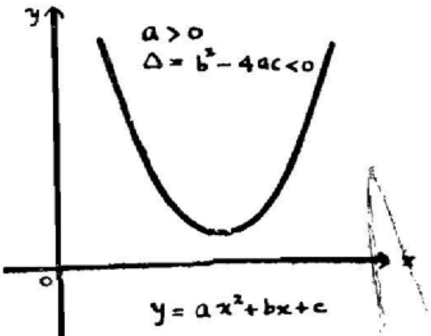
$$= a\left\{\left(x+\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2}\right\}$$

$$= a\left\{\left(x+\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{k^2}{4a^2}\right\} \qquad [\because\ \Delta = -k^2].$$

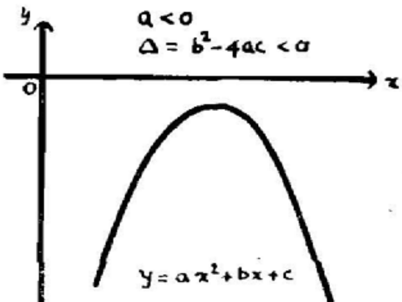
$$= a\left\{\left(x+\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{k}{2a}\right)^2\right\}$$

$= a$\{ಧನ ಸಂಖ್ಯೆ\} .... [ಏಕೆ?]

$a > o$ ಇರುವಾಗ ಚಿತ್ರ : 7.25.1 ರಲ್ಲೂ ಮತ್ತು $a < o$ ಇರುವಾಗ ಚಿತ್ರ : 7.25.2 ರಲ್ಲೂ ವರ್ಗ ಸಂಬಂಧಕದ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ : 7.25.1



ಚಿತ್ರ : 7.25.2

$\therefore$ yದ ಚಿಹ್ನೆ $= a$ದ ಚಿಹ್ನೆ. ಇದರಿಂದ

7.26 ಪ್ರಮೇಯ : $ax^2 + bx + c$, $(a \neq o)$ **ಎಂಬ ವರ್ಗ ಸಂಬಂಧಕವು ಶೋಧಕ ಋಣ** $[b^2 - 4ac < o]$ **ಆದಾಗ,** x **ದ ಎಲ್ಲಾ ವಾಸ್ತವ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ** a **ದ ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನೇ ಪಡೆಯುತ್ತದೆ.**

7.27 ಉದಾ : (i) $y = 3x^2 + 5x - 2$ ವರ್ಗ ಸಂಬಂಧಕವು xನ ಯಾವ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಧನವಾಗುತ್ತದೆ.

(a) ಇದರಲ್ಲಿ $\Delta = (5)^2 - 4 \times 3 \times -2 = 49 > o$.

(b) ಅನುಗತ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ; $3x^2 + 5x - 2 = o$.

ಇದರ ಮೂಲಗಳು : -2 ಅಥವಾ $\frac{1}{3}$.

(c) 'a'ನ ಚಿಹ್ನೆ $=x^2$ನ ಗುಣಕದ ಚಿಹ್ನೆ ಧನ; ಆದ್ದರಿಂದ $-2 < x < \frac{1}{3}$ ಇರುವಾಗ, y ಋಣವಾಗುತ್ತದೆ. $x < -2$ ಮತ್ತು $x > \frac{1}{3}$ ಇರುವಾಗ, y ಧನವಾಗುತ್ತದೆ [7.22 ಪ್ರಮೇಯ ನೋಡಿರಿ]. ಈಗ yದ ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

$$\begin{aligned}
y &= 3x^2 + 5x - 2 \\
&= 3\left\{x^2 + \frac{5}{3}x - \frac{2}{3}\right\} \\
&= 3\left\{x^2 + 2(x)\left(\frac{5}{6}\right) + \left(\frac{5}{6}\right)^2 - \left(\frac{5}{6}\right)^2 - \frac{2}{3}\right\} \\
&= 3\left\{\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{25}{36} - \frac{2}{3}\right\} \\
&= 3\left\{\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 - \left(\frac{7}{6}\right)^2\right\}
\end{aligned}$$

ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣದ ಬಲಬದಿಯಲ್ಲಿ ಪುಷ್ಪಾವರಣದಲ್ಲಿರುವ ಮೊದಲ ಪದವು ಒಂದು ಪೂರ್ಣವರ್ಗ; ಆದ್ದರಿಂದ ಇದು xದ ಎಲ್ಲಾ ವಾಸ್ತವ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ ಧನ; ಆದ್ದರಿಂದ yದ ಕನಿಷ್ಟ ಬೆಲೆಯು $x + \frac{5}{6} = o$ ಅಥವಾ $x = -5/6$ ಆದಾಗ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಆ ಬೆಲೆಯು $-3 \times \left(\frac{7}{6}\right)^2 = \frac{-49}{12}$ ಆಗುತ್ತದೆ. ದತ್ತ ಸಂಬಂಧಕವು ನಿಖರವಾದ ಯಾವ ಗರಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಯನ್ನೂ ಪಡೆಯಲಾರದು [ಏಕೆ?].

(ii) xವಾಸ್ತವವಾದಾಗ, $-2x^2 - 3x + 1$ ಸಂಬಂಧಕದ ಗರಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಪಡೆಯೋಣ.

$$\begin{aligned}
y &= -2x^2 - 3x + 1 \\
&= 1 - 2x^2 - 3x \\
&= 1 - 2\left\{x^2 + \frac{3}{2}x\right\} \\
&= 1 - 2\left\{\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2\right\} \\
&= 1 - 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + 2 \times \frac{9}{16}
\end{aligned}$$

$$= \frac{17}{8} - 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2$$

ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣದ ಬಲಬದಿಯಲ್ಲಿ ಬರುವ ಎರಡನೆಯ ಪದ : $-2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2$ xದ ಎಲ್ಲ ವಾಸ್ತವ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ ಋಣ; ಆದ್ದರಿಂದ yದ ಗರಿಷ್ಠ ಬೆಲೆ $-2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 = o$, ಅಥವಾ $x = -3/4$ ಆದಾಗ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ [ಏಕೆ?]. ಆ ಬೆಲೆಯು $\frac{17}{8}$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಟೀಕೆ : ಮೇಲಿನ ಉದಾ : (i) ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಂಬಂಧಕ yದ ಕನಿಷ್ಠಬೆಲೆಯು, $x = -\frac{5}{6} = \frac{1}{2} \times$ (ಅನುಗತ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳ ಮೊತ್ತ) ಆದಾಗ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ; ಉದಾ : (ii) ರಲ್ಲಿ yದ ಗರಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಯು, $x = -3/4 = \frac{1}{2} \times$ (ಮೂಲಗಳ ಮೊತ್ತ) ಆದಾಗ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ; ಇವುಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ. ಈ ಅಂಶಗಳು ಚಿತ್ರ : 7.21.1 ಮತ್ತು ಚಿತ್ರ : 7.21.2. - ಇವುಗಳ ಪರಿಶೀಲನೆಯಿಂದ ತಿಳಿದುಬರುತ್ತವೆ.

7 28 ಉದಾ : x ದ ಎಲ್ಲಾ ವಾಸ್ತವ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ $\frac{1}{3} < \frac{x^2+2x+4}{x^2-2x+4} < 3$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸೋಣ.

ಸಾಧನೆ : $y = \frac{x^2+2x+4}{x^2-2x+4}$ ಎಂದಿರಲಿ.

$$\Rightarrow \quad y(x^2-2x+4) = x^2+2x+4$$
$$\Rightarrow \quad yx^2 - x^2 - 2yx - 2x + 4y - 4 = 0$$
$$\Rightarrow \quad (y-1)x^2 + (-2y-2)x + (4y-4) = 0.$$

ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಶೋಧಕ >0 ಆದಾಗ, xವು ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ವ್ಯತಿರಿಕ್ತ [ಏಕೆ?]. ಈಗ,

$$\begin{aligned} \Delta &= (-2y-2)^2 - 4(y-1)(4y-4) \\ &= 4y^2 + 8y + 4 - 4(4y^2 - 8y + 4) \\ &= -12y^2 + 40y - 12 \qquad \ldots \quad (7.28.1) \end{aligned}$$

Δ ವರ್ಗ ಸಂಬಂಧಕವು y ದ ಯಾವ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಧನ ಎಂಬುದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ. (7.28.1) ರ ಅನುಗತ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲಗಳು : 3 ಮತ್ತು

$\frac{1}{3}$ ಇರುವುದರಿಂದ, ಮತ್ತು $\triangle$ ದ ಶೋಧಕ $=(40)^2-4\times-12\times-12=$ $1600-576>0$, ಇರುವುದರಿಂದ, $\frac{1}{3}<y<3$ ಆದಾಗ ಮಾತ್ರ, $\triangle>0$ ಆಗುತ್ತದೆ. [ಅ–7.4.1–(v) ನೋಡಿರಿ.].

—

ಅಭ್ಯಾಸ 7.4

1. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ವರ್ಗ ಸಂಬಂಧಕಗಳು ಚರಾಕ್ಷರದ ಯಾವ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಧನ ವಾಗುತ್ತವೆ?

(i) $2x^2+5x+6$. (ii) $x+6-x^2$. (iii) $-5+2x-x^2$.
(iv) $2z^2+15z+z$. (v) $-12y^2+40y-12$.

2. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ವರ್ಗ ಸಂಬಂಧಕಗಳು, x ನ ಯಾವ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಋಣ ವಾಗುತ್ತವೆ?

(i) $4x^2+12x+9$. (ii) $-1+10x^2-3x$.
(iii) $-4x^2+12x-9$. (iv) $-x^2+3x-2$.

3. xನ ಎಲ್ಲ ವಾಸ್ತವ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ, ಈ ಸಂಬಂಧಕಗಳು ಧನವೆಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

(i) x^2-4x+4. (ii) $2x^2-4x-21$.
(iii) $(x-1)(x-3)+1$. (iv) $5x^2-6x+2$.

4. x ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದಾಗ ಕೆಳಗಿನ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಿರಿ.

(i) $\frac{2x^2-3x+2}{x^2+x+1}$ ಎಂಬುದು $\frac{1}{3}$ ಮತ್ತು 7 ರ ನಡುವೆ ಇರುತ್ತದೆ.

(ii) $\frac{x^2-5x+4}{x^2-8x+15}$ ಎಂಬುದು ಎಲ್ಲ ವಾಸ್ತವ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತದೆ.

(iii) $\frac{x^2-3x+2}{x^2-3x+3}$ ಎಂಬುದು $\frac{-1}{3}$ ಮತ್ತು 1 ರ ನಡುವೆ ಇರುವುದಿಲ್ಲ.

(iv) $\frac{x^2+8x+80}{2x+8}$ ಎಂಬುದು -8 ಮತ್ತು 8 ರ ನಡುವೆ ಇರುವುದಿಲ್ಲ.

(v) $\frac{x^2-3x+2}{31x^2-x-30}$ ಎಂಬುದು ಎಲ್ಲಾ ವಾಸ್ತವ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತದೆ.

(vi) $\frac{x^2+34x-71}{x^2+2x-7}$ ಎಂಬುದು 5 ಮತ್ತು 9 ರ ನಡುವೆ ಇರುವುದಿಲ್ಲ.

(vii) $\dfrac{2x^2-7x+1}{x^2+x+2}$ ಎಂಬುದು -1 ಮತ್ತು $4\frac{1}{7}$ ರ ನಡುವೆ ಇರುತ್ತದೆ.

(viii) $\dfrac{3x^2-5x-2}{x^2+x+1}$ ಎಂಬುದು $-2\frac{1}{3}$ ಮತ್ತು 7ರ ನಡುವೆ ಇರುವುದು.

(ix) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{3x+1}-\dfrac{1}{(x+1)(3x+1)}$ ಎಂಬುದು 1 ಮತ್ತು 4ರ ನಡುವೆ ಇರುವುದಿಲ್ಲ.

(x) $\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+2x-8}$ ಎಂಬುದು $\frac{4}{9}$ ಮತ್ತು 1 ರ ನಡುವೆ ಇರುವುದಿಲ್ಲ.

5 xನ ಯಾವ ಗರಿಷ್ಠ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಬೆಲೆಗೆ $752-x(2x+5)$ ಎಂಬ ವರ್ಗ ಸಂಬಂಧಕವು ಧನವಾಗುತ್ತದೆ?

6. xನ ಯಾವ ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಗೆ $2x^2+23x-600$ ಎಂಬುದು ಧನವಾಗುತ್ತದೆ?

7 ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಗರಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $3-5x-7x^2$. (ii) $(4+x)(5-x)$.

(iii) $(7+x)(x-1)-5x^2$. (iv) $3x-2x^2+1$.

8 ಇವುಗಳ ಕನಿಷ್ಠ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) x^2+4x+4. (ii) x^2+4x+7.

(iii) x^2+6x+2. (iv) $5x^2+7x+8$.

8

ಶ್ರೇಣಿಗಳು

8.1 ವ್ಯಾಖ್ಯೆ : $A=\{a_1, a_2, a_3,\dots,a_n,\dots\}$ ಎಂಬ ಗಣವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. ಈ ಗಣದಲ್ಲಿ ಬರುವ a_n ಎಂಬ ಸಂಕೇತದ ಬೆಲೆಯು n ಎಂಬ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ನಿರ್ಣಯಿಸಲ್ಪಟ್ಟರೆ, ಆಗ

$$a_1, a_2, a_3,\dots,a_n,\dots \qquad \dots \qquad (8.1.1)$$

ಎಂಬ A ಗಣದ ಗಣಾಂಶಗಳ ಪರಂಪರೆಯನ್ನು ಶ್ರೇಣಿ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದರಲ್ಲಿ ಬರುವ a_n ಎಂಬ ಸಂಕೇತವನ್ನು ಈ ಶ್ರೇಣಿಯ nನೆಯ ಪದ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಟೀಕೆ : ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಬರುವ ಶ್ರೇಣಿಯ ಪದಗಳೆಲ್ಲವೂ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ.

ಉದಾ : (i) $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,\dots,n,\dots$

ಈ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ $a_1=1,\quad a_2=2,\dots,a_7=7,\dots$

(ii) $2, 2^2, 2^3, 2^4,\dots, 2^n,\dots$

ಇದರಲ್ಲಿ $a_1=2,\ a_2=2^2,\dots,a_n=2^n,\dots$

(iii) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4},\dots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1},\dots$

ಇಲ್ಲಿ, $a_1=1,\quad a_4=\frac{1}{4},\quad a_{n+1}=\frac{1}{n+1},\dots$

8.2 ವ್ಯಾಖ್ಯೆ : ಒಂದು ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಬರುವ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಪದಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು* ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ, ಆ ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ದತ್ತ ಶ್ರೇಣಿಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

---

* ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಎರಡು ಪದಗಳಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೆಯ ಪದವನ್ನು ಎರಡನೆಯ ಪದದಿಂದ ಕಳೆದಾಗ ಬರುವ ವ್ಯತ್ಯಾಸ.

ಉದಾ : 1, 2, 3, 4, 5, 6,..., n, $n+1$,...
ಈ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ $2-1=3-2=5-4=\cdots=n+1-n=1,\ldots$ ಇರುವುದರಿಂದ, ಇದು ಒಂದು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿ; ಇದರ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 1 ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ.

ಟೀಕೆ : $a_2-a_1=a_3-a_2=\cdots=a_n-a_{n-1}=$ ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆ ಆದಾಗ (8.1.1) ಶ್ರೇಣಿಯು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯಾಗುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ. ಇನ್ನು ಮುಂದೆ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು $A.\ P$ ಎಂಬ ಸಂಕೇತದಿಂದ ಸೂಚಿಸೋಣ.

8.3 **ಟೀಕೆ :** $a,\ a+d,\ a+2d,\ldots,\ a+(n-1)d,\ldots$ (8.3.1)
ಒಂದು $A.P$ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ [ಏಕೆ?]. ಈ $A.\ P$ ಯನ್ನು **ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.** ಈ ಶ್ರೇಣಿಯ **ಮೊದಲ ಪದ** ಮತ್ತು **ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ** d ಎಂಬುದನ್ನು ನೆನಪಿಸಲ್ಲಿಡೋಣ.

8.4 ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯ n ನೆಯ ಪದವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವ ಕ್ರಮ :

ದತ್ತಶ್ರೇಣಿ (8.3.1)ರ n ನೆಯ ಪದವನ್ನು ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ t_n ಎಂದು ಬರೆದು ಸೂಚಿಸೋಣ.

ಈಗ 1ನೆಯ ಪದ $=t_1=a=a+(1-1)d$, ಎಂದುಬರೆಯಬಹುದು.

,, 2— ,,— $=t_2=a+d=a+(2-1)d$.

,, 3— ,,— $=t_3=a+2d=a+(3-1)d$.

,, 4— ,,— $=t_4=a+3d=a+(4-1)d$.

ಆದ್ದರಿಂದ n — ,,— $=t_n=a+(n-1)d$ ಎಂದು ತಿಳಿದುಬರುತ್ತದೆ.
ಆದ್ದರಿಂದ, ಸಾಮಾನ್ಯ $A.\ P$ ಯ n ನೆಯ ಪದವನ್ನು ಪಡೆಯಲು,

$$t_n=a+(n-1)d \quad \ldots \quad (8.4.1)$$

ಎಂಬ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಪ್ರಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ.

8.5 ಟೀಕೆ : ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ d ಇರುವ ಒಂದು A. P. ಯ ಯಾವುದೇ ಪದವು l ಆದರೆ, ಅದರ ಹಿಂದಿನ ಪದವು $l-d$ ಮತ್ತು ಮುಂದಿನ ಪದವು $l+d$ ಎಂಬುದನ್ನು ನೆನಪಿಸಲ್ಲಿಡೋಣ. [ಏಕೆ? ಸಮರ್ಥಿಸಿರಿ].

ಉದಾ : ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಶ್ರೇಣಿಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಮತ್ತು 10 ನೆಯ ಪದಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯೋಣ.

$\therefore$ ಬೇಕಾದ $A.M.$ ಗಳು $6+\frac{10}{7},\ 6+2\times\frac{10}{7},\ldots,6+6\times\frac{10}{7}.$

8.10 ಟೀಕೆ : ಸಾಮಾನ್ಯ $A.\ P.$ (8.3.1) ಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ, ಇದುವರೆಗೆ ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ಪಡೆದಿದ್ದೇವೆ.

$$t_n=a+(n-1)d \quad \ldots \quad (8.4.1)$$

$$S_n=\frac{n}{2}\ [a+t_n] \quad \ldots \quad (8.6.1)$$

$$S_n=\frac{n}{2}\ [2a+(n-1)d] \quad \ldots \quad (8.6.2)$$

ಈ ಸೂತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ಬರುವ $a,\ n,\ d,\ t_n$ ಮತ್ತು S_n ಎಂಬ 5 ಸಂಕೇತಗಳ ಪೈಕಿ ಯಾವುದೇ 3 ಸಂಕೇತಗಳ ಬೆಲೆಗಳು ಗೊತ್ತಾದಾಗ ಉಳಿದ ಎರಡರ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದೆಂಬುದನ್ನು ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡೋಣ.

8.11 ಉದಾ : (*a*) ಒಂದು $A.\ P.$ ಯ 22ನೆಯ ಪದವು 54; ಮೊದಲನೆಯ ಪದವು 12 ಆಗಿದೆ. ಈ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊದಲ 20 ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

ಈ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ $t_{22}=54;\ a=12;\ d=?;$

$$t_{22}=a+(22-1)d$$

$$\therefore\quad 54=12+21d$$

$$\therefore\quad 21d=42 \text{ ಅಥವಾ } d=(42/21)=2.$$

ಈಗ $S_n=\frac{n}{2}\ [\ 2a+\ (n-1)d\ ]$

$$\therefore\quad S_{20}=\frac{20}{2}\ [2\times12+(20-1)2]$$

$$=10[24+38]=620.$$

(*b*) $-9,-6,-3,\ldots$ ಈ ಶ್ರೇಣಿಯ ಎಷ್ಟು ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ 66 ಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗುತ್ತದೆ ?

ಇಲ್ಲಿ $a=-9;\ d=-6-(-9)=3;\ \ S_n=66;\ n=?$

$$S_n=\frac{n}{2}\ [2a+(n-1)d]$$

$$=\frac{n}{2}\ [\ -18+(n-1)3\ ]$$

$$= \frac{n}{2} \ [-21+3n]$$

$$\therefore 66 = \frac{n}{2} \ [-21+3n]$$

$$132 = -21n + 3n^2$$

$$\therefore \quad 3n^2 - 21n - 132 = 0$$

$$\therefore \quad n^2 - 7n - 44 = 0$$

$$\therefore \quad n^2 - 11n + 4n - 44 = 0$$

$$\therefore \quad n(n-11) + 4(n-11) = 0$$

$$\therefore \quad (n-11)(n+4) = 0$$

$\therefore \quad n = 11$ ಅಥವಾ $n = -4$.

ಈಗ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊದಲ 11 ಪದಗಳನ್ನು ಬರೆಯೋಣ.

—9, —6, —3, —0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21. ಈ 11 ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ 66 ಎಂಬುದನ್ನು ತಾಳೆ ನೋಡಬಹುದು. ಅಂದರೆ, $n = 11$ ಎಂಬ ಉತ್ತರ ಸಮಂಜಸವೆಂದು ತೀರ್ಮಾನವಾಯಿತು. $n = -4$ ಎಂಬ ಉತ್ತರದ ಬಗ್ಗೆ ಏನಾದರೂ ಸಮಂಜಸವಾದ ವಿವರಣೆ ಕೊಡಬಹುದೇ? ಎಂದು ವಿಚಾರ ಮಾಡೋಣ. ಮೇಲೆ ಬರೆದಿರುವ 11 ಪದಗಳ ಪೈಕಿ, ಕೆಳಗೆ ಗೆರೆ ಎಳೆದಿರುವ 7 ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ ಶೂನ್ಯ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ. ಇದರಿಂದ ಕೊನೆಯ ಪದದಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿ ಹಿಮ್ಮೊಗವಾಗಿ 4 ಪದಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಕೂಡಿದರೆ ಮೊತ್ತ 66 ಬರುತ್ತದೆಂಬುದು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $n = -4$ ಎಂಬುದಕ್ಕೆ ಮೇಲಿನ ಅರ್ಥವನ್ನು ಕೊಡಬಹುದು.

(c) *A. P.* ಯಲ್ಲಿರುವ 3 ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ 12 ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಘನಗಳ ಮೊತ್ತ 288 ಆದರೆ, ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

ಬೇಕಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು $l-d, \ l, \ l+d$ ಎಂದಿರಲಿ [ಏಕೆ? ಟೀಕೆ 8.5 ನೋಡಿರಿ.]

ದತ್ತ : (i) $l-d+l+l+d = 12$.

(ii) $(l-d)^3 + l^3 + (l+d)^3 = 288$.

(i) ರಿಂದ $3l = 12$ ಅಥವಾ $l = 4$.

(ii) ರಿಂದ $l^3 - d^3 - 3ld(l-d) + l^3 + l^3 + d^3 + 3ld(l+d) = 288$.

ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿದರೆ, $3l^3 + 6ld^2 = 288$

ಇದರಲ್ಲಿ $l = 4$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ, $3 \times 4^3 + 6 \times 4 \times d^2 = 288$

$\therefore \quad d^2=4$ ಅಥವಾ $d=\pm 2$

ಆದ್ದರಿಂದ ಬೇಕಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು :

$l=4,\ d=2$ ಆದಾಗ : $4-2,\ 4,\ 4+2$

$=2,\ 4,\ 6,$ ಆಗುತ್ತವೆ.

$l=4,\ d=-2$ ಆದಾಗ: $4-(-2),\ 4,\ 4+(-2)$

$=6,\ 4,\ 2$ ಆಗುತ್ತವೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 8.1

1. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ $A.\ P.$ ಗಳಲ್ಲಿ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಮತ್ತು ಸೂಚಿಸಿರುವ ಪದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(a) $-2,\ 1,\ 4,\ \ldots$; ಇದರಲ್ಲಿ 8ನೇ ಪದ

(b) $2\frac{1}{2},\ 1,\ -\frac{1}{2}\ \ldots$; ಇದರಲ್ಲಿ 10ನೇ ಪದ

(c) $-0.5,\ 0.375-0.25\ \ldots$; ಇದರಲ್ಲಿ 12ನೇ ಪದ

(d) $-2a,-7a,-12a,\ \ldots$; ಇದರಲ್ಲಿ 14ನೇ ಪದ

(e) $(a+b)^2,\ a^2+b^2,(a-b)^2,\ \ldots$; ಇದರಲ್ಲಿ 5ನೇ ಪದ

(f) $l-3d,\ l-d,\ l+d,\ \ldots$; ; ಇದರಲ್ಲಿ 6ನೇ ಪದ

(g) $8,\ 6,\ 4,\ \ldots$; ಇದರಲ್ಲಿ 24ನೇ ಪದ

(h) $16,\ 6,\ -4,\ \ldots$; ಇದರಲ್ಲಿ 17ನೇ ಪದ

(i) $2-x,\ 5,\ 8+x,\ \ldots$; ಇದರಲ್ಲಿ 15ನೇ ಪದ

(j) $x-y,\ 2x,\ 3x+y,\ \ldots$; ಇದರಲ್ಲಿ 19ನೇ ಪದ

(k) $a+d,\ a-d,\ a-3d,\ \ldots$; ಇದರಲ್ಲಿ 9ನೇ ಪದ

2. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ $A.\ P.$ ಗಳಲ್ಲಿ ಕೊನೆಯ ಪದವನ್ನು ಮತ್ತು ಸೂಚಿಸಿರುವ ಪದಗಳ ವರೆಗಿನ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(a) $1,\ 3,\ 5,\ \ldots$; 12 ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ

(b) $5.\ 3,\ 4.\ 2,\ 3.\ 1,\ \ldots$, 9 ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ

(c) $\frac{1}{2},\ \frac{5}{6},\ 1\frac{1}{6},\ \ldots,$; 20 ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ

(d) $2,-2,-6,\ldots,$; 100 ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ

(e) $\frac{x^2-1}{x}$, x, $\frac{x^2+1}{x}$, ... ; x ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ

(f) $3\sqrt{2}$, $\frac{8}{\sqrt{2}}$, $5\sqrt{2}$, ... ; 40 ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ

(g) 2.3, 5.4, 8.5, ... ; 30 ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ

(h) $-9, -5, -1$, ... ; 22 ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ

(i) 9, 14, 19, ... ; 12 ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ

(j) $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, ... ; 27 ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ

(k) p, $2p$, $3p$, ... ; p ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ

3. ಒಂದು $A.P.$ ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ a (ಮೊದಲ ಪದ), d (ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ), t_n (n ನೆಯ ಪದ), n ಮತ್ತು S_n (ಮೊದಲ n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ) ಎಂಬ ಸಂಕೇತಗಳ ಪೈಕಿ ಮೂರರ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಉಳಿದ ಸಂಕೇತಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಿರಿ.

(a) $d=3$, $t_n=50$, $S_n=440$.

(b) $a=24$, $d=-3$, $n=25$.

(c) $a=5$, $t_n=24$, $S_n=290$.

(d) $a=3x$, $t_n=35x$, $S_n=-320x$

(e) $a=4$, $d=3$, $S_n=424$.

(f) $S_n=-90$, $d=-1$, $a=5$.

(g) $a=3$, $d=2$, $S_n=399$.

(h) $t_n=51$, $a=7$, $n=11$.

(i) $d=-2$, $S_n=288$, $a=35$.

(j) $a=42$, $d=-2$, $t_n=10$

4 ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಡುವೆ ಸೂಚಿರುವಷ್ಟು $A. M.$ ಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ;

(a) 71 ಮತ್ತು 23ರ ನಡುವೆ 15 (b) -11 ಮತ್ತು 11ರ ನಡುವೆ 10

(c) 5 ಮತ್ತು 23ರ ನಡುವೆ 3 (d) $8\frac{1}{2}$ ಮತ್ತು $2\frac{1}{3}$ ರ ನಡುವೆ 36

(e) 4 ಮತ್ತು -21ರ ನಡುವೆ 8 (f) 2 ಮತ್ತು -121ರ ನಡುವೆ 40

(g) 23 ಮತ್ತು -58ರ ನಡುವೆ 8 (h) $-7\frac{1}{2}$ ಮತ್ತು $-2\frac{1}{5}$ ರನಡುವೆ24

(i) 4 ಮತ್ತು 44 ರ ನಡುವೆ 10 (j) 2 ಮತ್ತು 22 ರ ನಡುವೆ 10.

5. ಒಂದು. $A. P.$ ಯ n ನೆಯ ಪದ $\frac{2n-1}{6}$ ಆದರೆ, ಮೊದಲ 25 ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. ಒಂದು $A. P.$ ಯ n ನೆಯ ಪದ $\frac{5n+3}{7}$ ಆದರೆ, ಮೊದಲ $2n$ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವೆಷ್ಟು ?

7. 1 ರಿಂದ 100 ರ ವರೆಗಿನ ಎಲ್ಲಾ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. ಮೊದಲ n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ $(3n^2-n)$ ಆಗಿರುವ $A. P.$ ಯನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

9. 1 ಮತ್ತು 100 ರ ನಡುವೆಯಿರುವ ಮತ್ತು 5 ನ್ನು ಅಪವರ್ತನವಾಗುಳ್ಳ ಎಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವೆಷ್ಟು?

10. 1 ಮತ್ತು 100 ರ ನಡುವೆಯಿರುವ [2 ಮತ್ತು 3, ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ ಮತ್ತು ಇವುಗಳ ಅಪವರ್ತ್ಯಗಳನ್ನು ಬಿಟ್ಟು] ಎಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವೆಷ್ಟು?

11. 1 ಮತ್ತು 200 ರ ನಡುವೆಯಿರುವ [3 ಮತ್ತು 7, ಇವುಗಳ ಮತ್ತು ಇವುಗಳ ಅಪವರ್ತ್ಯಗಳನ್ನು ಬಿಟ್ಟು] ಎಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಸೂಚನೆ : ಮುಂದಿನ ಲೆಕ್ಕಗಳಲ್ಲಿ (12 ರಿಂದ 17) S_n ಎಂಬುದು ಒಂದು $A. P.$ ಯ n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನೂ ಮತ್ತು t_n ಎಂಬುದು ಅದೇ $A. P.$ ಯ n ನೆಯ ಪದವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ.

12. $S_m=S_n$ ಆದರೆ $S_{m+n}=o$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

13. $t_m=a,\ t_n=b$ ಆದರೆ $S_{m+n}=\frac{m+n}{2}\left(a+b+\frac{a-b}{m-n}\right)$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

14. $t_p=a,\ t_q=b,\ t_r=c$ ಆದರೆ $(q-r)a+(r-p)b+(p-q)c=$ $=o$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

15. $t_p=q$ ಮತ್ತು $t_q=p$ ಆದರೆ t_m ನ ಬೆಲೆಯೇನು?

16. $\frac{S_m}{S_n}=\frac{m^2}{n^2}$ ಆದರೆ $\frac{t_m}{t_n}=\frac{2m-1}{2n-1}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

17. $S_l = a$, $S_m = b$ ಮತ್ತು $S_n = c$ ಆದರೆ $\frac{a}{l}\ (m-n) + \frac{b}{m}(n-l)$

$+ \frac{c}{n}\ \ (l-m) = 0$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

18. ಮೂರು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು *A. P.* ಯಲ್ಲಿವೆ; ಅವುಗಳ ಮೊತ್ತ ಮತ್ತು ಗುಣಲಬ್ಧ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ 33 ಮತ್ತು 792 ಅದರೆ, ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾವುವು?

19 *A. P.* ಯಲ್ಲಿರುವ ಮೂರು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ 12 ಮತ್ತು ಗುಣಲಬ್ಧ—80 ಆದರೆ, ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

20. *A. P.* ಯಲ್ಲಿರುವ ಮೂರು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ 9 ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತ 125; ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

21. *A. P.* ಯಲ್ಲಿರುವ ಐದು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ75; ಅವುಗಳಲ್ಲಿರುವ ಕನಿಷ್ಠ ಮತ್ತು ಗರಿಷ್ಠ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ 161 ಆದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾವುವು?

22. a ಮತ್ತು b ಗಳ ನಡುವೆಯಿರುವ n *A. M.*ಗಳು, $\frac{an+b}{n+1}$,

$\frac{a(n-1)+2b}{n+1}, \ldots, \frac{2a+(n-1)b}{n+1}, \frac{a+nb}{n+1}$ ಆಗಿವೆಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

23. 1 ಮತ್ತು 21ರ ನಡುವೆ m *A.M* ಗಳನ್ನು ಬರೆದಿದೆ; 3 ಮತ್ತು 27ರ ನಡುವ n *A.M* ಗಳನ್ನು ಬರೆದಿವೆ. ಈ ಎರಡು ಶ್ರೇಣಿಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು ಒಂದೇ ಆದರೆ $5n - m = 1$ ಸಾಧಿಸಿರಿ.

24 —7 ಮತ್ತು 9ರ ನಡುವೆ n *A.M* ಗಳನ್ನು ಬರೆದಿದೆ. (ಕಡೆಯ 2 *A.M* ಗಳ ಮೊತ್ತ : ಮೊದಲ 2 *A.M* ಗಳ ಮೊತ್ತ) = (3: – 2) ಆದರೆ n ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

—

8.12 ವ್ಯಾಖ್ಯೆ : $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n+1}, \cdots \qquad (8.12.1)$ ಎಂಬ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \ldots = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \text{ ಸ್ಥಿರಸಂಖ್ಯೆ, ಆದಾಗ}$$

(8.12.1)ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು ಜ್ಯಾಮಿತಿ ಶ್ರೇಣಿಯೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಜ್ಯಾಮಿತಿ ಶ್ರೇಣಿಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪ್ರಮಾಣವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾ : (i) 3, 6, 12, 24, 48,...

ಈ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿ, $\frac{6}{3}=\frac{12}{6}=\frac{24}{12}=\cdots=2$. ಆದ್ದರಿಂದ, ಇದು ಒಂದು ಜ್ಯಾಮಿತಿ ಶ್ರೇಣಿ ಮತ್ತು ಇದರ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪ್ರಮಾಣ $=2$.

(ii) $2, -4, 8, -16, 32, -64, \ldots$

ಇಲ್ಲಿ $\frac{-4}{2}=\frac{8}{-4}=\frac{-16}{8}=\cdots=-2$. ಆದ್ದರಿಂದ ಇದು ಒಂದು ಜ್ಯಾಮಿತಿ ಶ್ರೇಣಿ ಮತ್ತು ಇದರ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪ್ರಮಾಣ $=-2$.

8.13 ಟೀಕೆ : $a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3,\ ar^4, \ldots,\ (a \neq o)$ (8.13.1) **ಎಂಬುದು ಒಂದು ಜ್ಯಾಮಿತಿ ಶ್ರೇಣಿ. ಇದರಲ್ಲಿ :**

$\frac{ar}{a}=\frac{ar^2}{ar}=\frac{ar^3}{ar^2}=\ldots=r$, **ಇರುವದರಿಂದ, ಸಾಮಾನ್ಯ ಪ್ರಮಾಣ** $=r$ **ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ. ಇನ್ನು ಮುಂದೆ ಜ್ಯಾಮಿತಿ ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು** G. P. **ಎಂಬ ಸಂಕೇತದಿಂದ ಸಪಚಿಸೋಣ.** (8.13.1) **ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯ** G. P. **ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದರ ಮೊದಲ ಪದ** a **ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ಪ್ರಮಾಣ** r **ಎಂಬುದನ್ನು ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡೋಣ.**

ಈಗ t_n ಎಂದು ಸೂಚಿಸುವ, ಸಾಮಾನ್ಯ G. P. ಯ n ನೆಯ ಪದವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯೋಣ. ಈ G. P. ಯಲ್ಲಿ

$t_1 = 1$ನೆಯ ಪದ $= a = ar^{1-1}$ ... [ಏಕೆ]

$t_2 = 2$ನೆಯ ಪದ $= ar = ar^{2-1}$

$t_3 = 3$ನೆಯ ಪದ $= ar^2 = ar^{3-1}$

$t_4 = 4$ನೆಯ ಪದ $= ar^3 = ar^{4-1}$

$\vdots$

ಆದ್ದರಿಂದ $t_n = n$ ನೆಯ ಪದ $= ar^{n-1}$, ... (8.13.2)

ಎಂದು ಸುಲಭವಾಗಿ ಗೊತ್ತಾಗುತ್ತದೆ.

8.14 ಉದಾ : $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{9}$.....ಎಂಬ ಶ್ರೇಣಿಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪ್ರಮಾಣ ಮತ್ತು 15 ನೆಯ ಪದವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯೋಣ.

ಈ ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು (8.13.1) ರೊಡನೆ ಹೋಲಿಸುವುದರಿಂದ :

$$a=\frac{1}{2},\ r=\frac{1}{3}\Big/\frac{1}{2}=\frac{2}{3} \text{ ಮತ್ತು } n=15$$

ಈ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು (8.13.2)ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸುವುದರಿಂದ :

$$t_{15}=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{15-1}=\frac{2^{13}}{3^{14}}.$$

8.15 ಟೀಕೆ : ಒಂದು G. P. ಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪ್ರಮಾಣವು r ಮತ್ತು ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಪದವು l ಆದರೆ ಆ ಪದವ ಹಿಂದಿನ ಪದವು $\frac{l}{r}$ ಮತ್ತು ಮುಂದಿನ ಪದವು lr ಆಗುತ್ತವೆಂಬುದನ್ನು ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡೋಣ (ಏಕೆ?).

8 16 ಸಾಮಾನ್ಯ G. P. ಯ ಮೊದಲ n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯುವ ಕ್ರಮ :

ಬೇಕಾದ ಮೊತ್ತವು S_n ಆದರೆ,

$$S_n=a+ar+ar^2+ar^3+\cdots\quad+ar^{n-2}+ar^{n-1},\text{ ಈಗ,}$$

$$r\times S_n=ar+ar^2+ar^3+ar^4+\cdots\qquad+ar^{n-1}+ar^n$$

$$\therefore\quad S_n-r\times S_n=a-ar^n$$

$$\therefore\quad S_n(1-r)=a\ (1-r^n)$$

$$\therefore\quad S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}\qquad\cdots\quad(8.16.1)$$

8.17 ಟೀಕೆ : (8.16.1) ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ a, r, n, ಮತ್ತು S_n ಎಂಬ ನಾಲ್ಕು ಸಂಕೇತಗಳ ಪೈಕಿ ಯಾವುದೇ ಮೂರು ಸಂಕೇತಗಳ ಬೆಲೆಗಳು ಗೊತ್ತಾದಾಗ ಉಳಿದ ಸಂಕೇತದ ಬೆಲೆಯುನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಬಹುದೆಂಬು ನೆನಪಿನಲ್ಲಿನಲ್ಲಿಡೋಣ.

ಉದಾ : 2, −4, 8, −16,...., ಈ G.P. ಯ ಮೊದಲ ಹತ್ತು ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯೋಣ.

ಇದರಲ್ಲಿ $a=2,\ r=\frac{-4}{2},\ n=10,\ S_{10}=?$

ಈ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು (8.16.1) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸುವುದರಿಂದ :

$$S_{10}=\frac{2[1-(-2)^{10}]}{1-(-2)}=\frac{2(1-2^{10})}{3}=-682.$$

8.18 ವ್ಯಾಖ್ಯೆ ; a, G, b, ಗಳು G. P. ಯಲ್ಲಿರುವಾಗ, G ಯನ್ನು a ಮತ್ತು b ಗಳ ನಡುವಿನ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಮಧ್ಯಕ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಸಂಕೇತದಲ್ಲಿ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಮಧ್ಯಕವನ್ನು *G. M.* **ಎಂದು ಬರೆದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.**

$a,\ G,\ b,$ ಗಳು $G.\ P.$ ಯಲ್ಲಿರಲಿ.

$\therefore\quad \frac{G}{a}=\frac{b}{G}$ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪ್ರಮಾಣ (ಏಕೆ?)

$\therefore\quad G^2=ab \quad \therefore\quad G=\pm\sqrt{ab}$ (8.11.1)

ಆದ್ದರಿಂದ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ $G.\ M.$ ವು ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧದ ವರ್ಗಮೂಲವೆಂಬುದನ್ನು ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡೋಣ.

$\therefore$ 2 ಮತ್ತು 8ರ $G.\ M. = \pm\sqrt{2\times 2}=\pm 4.$

8.19 ವ್ಯಾಖ್ಯೆ : $a,\ g_1,\ g_2,\ g_3,\ldots g_n,\ b$ ಗಳು $G.\ P$ ಯಲ್ಲಿರುವಾಗ $g_1, g_2, g_3,\ldots, g_n$ ಗಳನ್ನು a ಮತ್ತು bಗಳ ನಡುವೆ ಇಡುವೆ ಇರುವ n $G.M.$ ಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

8.20 ಉದಾ : $3\frac{5}{9}$ ಮತ್ತು $40\frac{1}{2}$, ಇವುಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ಐದು $G.M.$ ಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯೋಣ.

ಬೇಕಾದ $G.\ M.$ ಗಳು $g_1,\ g_2,\ g_3,\ g_4$ ಮತ್ತು g_5 ಗಳಾದರೆ,

$3\frac{5}{9}, g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, 40\frac{1}{2}$, ಎಂಬುದು G. P. ಯಾಗುತ್ತದೆ.

ಇದರಲ್ಲಿ $a=3\frac{5}{9}=\frac{32}{9},\ t_7=\frac{81}{2},\ r=?$

ಆದರೆ, $t_7=ar^{7-1}$

$\therefore\quad \frac{81}{2}=\frac{32}{9}r^6$

$\frac{81\times 9}{2\times 32}=r^6$ ಅಥವಾ $\left(\frac{3}{2}\right)^6=r^6$

$\therefore\quad r=\frac{3}{2}$

$\therefore$ ಬೇಕಾದ G.Mಗಳು: $\frac{32}{9}\times\frac{3}{2},\ \frac{32}{9}\times\left(\frac{3}{2}\right)^2,\ \frac{32}{9}\times\left(\frac{3}{2}\right)^3$

$\frac{32}{9}\times\left(\frac{3}{2}\right)^4,\ \frac{32}{9}\times\left(\frac{3}{2}\right)^5.$

(b) ಒಂದು G. P. ಯ 5 ನೆಯ ಪದ 81 ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯ ಪದ 24 ಆಗಿವೆ. ಈ G. P. ಯನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

ಇಲ್ಲಿ $t_5 = 81$, $t_2 = 24$, $a = ?$, $r = ?$

$t_5 = 81 = ar^{5-1}$, ; $t_2 = 24 = ar^{2-1} = ar$

$\therefore\ 81 = ar^4 = (ar)r^3 = 24\,r^3$ [ಏಕೆ]

$\therefore\ r^3 = \frac{81}{24} = \frac{27}{8} = \left(\frac{3}{2}\right)^3$

$\therefore\ r = \frac{3}{2}$ ಆದರೆ $ar = 24$

$\therefore\ a\frac{3}{2} = 24, \Rightarrow a = 16$

ಬೇಕಾದ G P. : $a, ar, ar^2, ar^3, \ldots$

ಅಂದರೆ : $16,\ 16 \times \frac{3}{2},\ 16 \times \left(\frac{3}{2}\right)^2,\ 16 \times \left(\frac{3}{2}\right)^3, \ldots$

$= 16, 24, 36, 54, \ldots$

(c) ಒಂದು *G. P.* ಯ 3 ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ 38 ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ 1728 ಆಗಿವೆ; ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಬೇಕಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು : $\frac{a}{r}$, a, ar ಎಂದಿರಲಿ [8.15 ಟೀಕೆ ನೋಡಿರಿ].

ಇದರಿಂದ :

(i) $\frac{a}{r} + a + ar = 38$, ಮತ್ತು

(ii) $\frac{a}{r} \cdot a \cdot ar = 1728$

$\therefore\ a^3 = 1728 = (12)^3 \quad \therefore\ a = 12.$

ಈ ಬೆಲೆಯನ್ನು (i) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದರೆ,

$$\frac{12}{r} + 12 + 12r = 38$$

ಅಥವಾ : $12r^2 + 12 - 26r = 0$

$\therefore\ 6r^2 - 13r + 6 = 0$

$\therefore\ (3r - 2)(2r - 3) = 0$

$\therefore\ 3r - 2 = 0$ ಅಥವಾ $2r - 3 = 0$

$\therefore\ r = \frac{2}{3}$ ಅಥವಾ $r = \frac{3}{2}$

ಆದ್ದರಿಂದ ಬೇಕಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು : $\frac{a}{r}$, a, ar,

$$a=12, \quad r=\frac{2}{3} \text{ ಆದಾಗ,} \quad 18,\ 12,\ 8,$$

$$a=12, \quad r=\frac{3}{2} \text{ ಆದಾಗ,} \quad 8,\ 12,\ 18.$$

8.21 ಸಾಮಾನ್ಯ $G.P.$ ಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪ್ರಮಾಣದ ನಿರಪೇಕ್ಷ ಮೌಲ್ಯವು ಶೂನ್ಯ ಮತ್ತು ಒಂದರ ನಡುವೆ ಇರುವಾಗ (ಅಂದರೆ $-1<r<1$) **$G.P.$ ಯ ಅನಂತ ಪದಗಳ ವರೆಗಿನ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಕ್ರಮ.**

ಬೇಕಾದ ಮೊತ್ತವನ್ನು S ಎಂದು ಸೂಚಿಸಿದರೆ,

$$S=a+ar+ar^2+ar^3+ar^4+\ldots \text{ ಅನಂತ ಪದಗಳ ವರೆಗೆ}$$

$$\because r\times S= \quad ar+ar^2+ar^3+ar^4+ar^5+\ldots \quad ,,$$

$$\therefore \quad S-rS=a \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \qquad [\text{ಏಕೆ}]$$

$$S(1-r)=a$$

$$\therefore \quad S=\frac{a}{1-r}\ldots \quad \ldots \quad \ldots \qquad (8.21.1)$$

ಹೀಗೆ ಪಡೆದ $\frac{a}{1-r}$ ನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯ G.P. (8.13.1)ರ ಅನಂತ ಪದಗಳ ವರೆಗಿನ ಮೊತ್ತವೆಂದು ಒಪ್ಪಿಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ.

8.22 ಉದಾ : (a) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots$ ಈ ಶ್ರೇಣಿಯ ಅನಂತ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

ಇಲ್ಲಿ $a=1, \quad r=\frac{1}{2} \quad \therefore \quad S=\frac{a}{1-r}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$

(b) $0.7+0.77+0.777+\ldots n$ ಪದಗಳ ವರೆಗಿನ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯೋಣ.

$S=0.7+0.77+0.777+\ldots$ n ಪದಗಳು ಎಂದಿರಲಿ.

$=7(0.1+0.11+0.111+\ldots$ n ಪದಗಳು)

$=\frac{7}{9}(0.9+0.99+0.999+\ldots$ n ಪದಗಳು)

$=\frac{7}{9}\left(\frac{9}{10}+\frac{99}{100}+\frac{999}{1000}+,,\right)$

$$=\frac{7}{9}\left(\frac{10-1}{10} + \frac{10^2-1}{10^2}\ \frac{10^3-1}{10^3}+\dots\ n \text{ ಪದಗಳು}\right)$$

$$=\frac{7}{9}\left[\left(1-\frac{1}{10}\right)+\left(1-\frac{1}{10^2}\right(+\left(1-\frac{1}{10^3}\right(+\dots n\text{ಪದಗಳು}\right]$$

$$=\frac{7}{9}\left[(1+1+1+\dots\ n \text{ ಪದಗಳು})-\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{10^4}+\dots\ n \text{ ಪದಗಳು}\right)\right]$$

$$=\frac{7}{9}\left[(n)-(a+ar+ar^2+\dots+n \text{ ಪದಗಳು})\right].$$

ಇಲ್ಲಿ $a=\frac{1}{10}$ ಮತ್ತು $= r=\frac{1}{10}$

$$=\frac{7}{9}\left[n-\frac{a(1-r^n)}{1-r}\right]=\frac{7}{9}\left[n-\frac{1}{10}\ \frac{\left(1-\frac{1}{10^n}\right)}{1-\frac{1}{10}}\right]$$

$$=\frac{7n}{7}-\frac{7}{9^2}\ \frac{(10^n-1)}{10^n}$$

8.23 ಉದಾ : $0.\dot{4}1\dot{6}$ ಎಂಬ ಅವರ್ತಕ ದಶಮಾಂಶವನ್ನು ಸಮಬೆಲೆಯ ಭಿನ್ನ ರಾಶಿಗೆ ಪರಿವರ್ತಿಸೋಣ.

$0.\dot{4}1\dot{6}=0.416416416416416\ \dots$

$$\left.\begin{array}{l}0.416\\0.000416\\0.000000416\\0.000000000416\\\vdots\end{array}\right\}\text{ ಕೂಡೋಣ.}$$

$0.\dot{4}1\dot{6}=0.416+0.000\ 416+0.000000416+0.000000000\ 416+\dots$

$=\frac{416}{10^3}+\frac{416}{10^6}+\frac{416}{10^9}+\frac{416}{10^{12}}+\ \dots$ ಅನಂತ ಪದಗಳ ವರೆಗಿನ ಮೊತ್ತ.

$$= \frac{416}{10^3}\left\{1 + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^6} + \frac{1}{10^9} + \cdots\right\}$$

$$= \frac{416}{10^3} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{10^3}} = \frac{416}{999}$$

ಅಭ್ಯಾಸ 8.2

1. ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು G.P. ಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪ್ರಮಾಣ ಮತ್ತು ಸೂಚಿಸಿರುವ ಪದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

a) 2, 6, 18, ... ; 6 ನೆಯಪದ *b*) 2, $\frac{3}{2}$, $\frac{8}{9}$, ... ; 4 ನೆಯಪದ

c) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{7}$, ... ; 7 ನೆಯಪದ *d*) 5, 15, 45,... ; 10ನೆಯಪದ

e) $\frac{2}{9}$, $-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, ... ; 6 ನೆಯಪದ *f*) 2, -2^3, 2^5,... ; nನೆಯಪದ

g) 3,0.3,0.03,...; 8 ನೆಯಪದ *h*) $\frac{1}{a^2}, -\frac{1}{a^3}, \frac{1}{a^4}, \ldots$; nನೆಯ ಪದ

2. *a*) ಒಂದು G. P. ಯ 2ನೆಯ ಪದ $\frac{10}{3}$ ಮತ್ತು 7ನೆಯ ಪದ $\frac{320}{729}$ ಆಗಿವೆ. ಇದರ ಮೊದಲಪದ ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

b) 2, –6, 18,... ಎಂಬ G.P.ಯ ಯಾವ ಪದವು 162 ಆಗುತ್ತದೆ?

c) ಒಂದು G.P.ಯ 6ನೆಯ ಪದ –32 ಮತ್ತು 3ನೆಯ ಪದ 4 ಆದರೆ, ಆ G. P. ಯಾವುದು?

d) ಒಂದು G.P.ಯ 5ನೆಯ ಪದ 9 ಮತ್ತು 8ನೆಯ ಪದ 243 ಆದರೆ, ಆ G. P. ಯನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

e) ಒಂದು G. P. ಯ 4ನೆಯ ಪದ 8 ಮತ್ತು 9ನೆಯ ಪದ 256 ಆದಾಗ, ಅದರ pನೆಯ ಪದವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. ಒಂದು G.P.ಯ pನೆಯ ಪದ $=$ P; qನೆಯ ಪದ $=$ Q, ಮತ್ತು rನೆಯ ಪದ $=$ R ಆದರೆ, $P^{q-r}\ Q^{r-p}\ R^{p-q} = 1$, ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

4. ಕೆಳಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ G.P. ಗಳಲ್ಲಿ, ಸೂಚಿಸಿರುವ ಪದಗಳ ವರೆಗಿನ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

a) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{9}$,..., ; 7 ಪದಗಳು

b) 3, 12, 48,... ; 10 ಪದಗಳು

c) $-2, 2\frac{1}{2}, -3\frac{1}{8}, \ldots$; 6 ಪದಗಳು

d) $1, \sqrt{3}, 3, \ldots$; 12 ಪದಗಳು

e) $\sqrt{2}, \sqrt{6}, \sqrt{18}, \ldots$; 18 ಪದಗಳು

f) $3, -1, \frac{1}{3} \ldots$; 10 ಪದಗಳು

g) $81, -27, 9, \ldots$; 5 ಪದಗಳು

h) $16.2, 5.4, 1.8, \ldots$; 7 ಪದಗಳು

i) $\frac{3}{4}, 1\frac{1}{2}, 3, \ldots$; 8 ಪದಗಳು

j) $\frac{1}{\sqrt{2}}, -2, \frac{8}{\sqrt{2}}, \ldots$; 7 ಪದಗಳು

5. ಒಂದು G.P. ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ a(ಮೊದಲಪದ), r(ಸಾಮಾನ್ಯ ಪ್ರಮಾಣ), s_n (ಮೊದಲ n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ), t_n (nನೆಯ ಪದ) ಮತ್ತು n ಎಂಬ ಸಂಕೇತಗಳ ಪೈಕಿ, 3 ಸಂಕೇತಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದೆ. ಉಳಿದ ಸಂಕೇತಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಿರಿ.

a) $a=1, \ s_n=13, \ n=3$

b) $t_n=98, \ r=7, \ n=5$

c) $r=\frac{2}{3}, \ n=4, \ s_n=\frac{13}{18}$

d) $r=3, \ s_n=728, \ t_n=486$

e) $a=7, \ t_n=448, \ s_n=889$

f) $s_n=-21, \ r=-\frac{1}{2}, \ t_n=1$

g) $a=3, \ r=2, \ s_n=189$

h) $r=2, \ t_n=24, \ a=3/4$

i) $s_n=\frac{76}{3} \ r=\frac{2}{3}, \ a=12$

j) $a=2, \ t_n=256, \ s_n=510$

6. ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಡುವೆ ಸೂಚಿಸಿರುವಷ್ಟು G.M. ಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ

a) 3 ಮತ್ತು 48 ರ ನಡುವೆ 3 G. M. ಗಳು

b) $2\frac{1}{4}$ ಮತ್ತು $\frac{4}{9}$ ರ ನಡುವೆ 3 G. M. ಗಳು

c) 14 ಮತ್ತು $\frac{-7}{64}$ ರ ನಡುವೆ 6 G. M. ಗಳು

d) 27 ಮತ್ತು $\frac{1}{27}$ ರ ನಡುವೆ 5 G. M. ಗಳು

e) $\frac{1}{2}$ ಮತ್ತು $\frac{16}{243}$ ರ ನಡುವೆ 4 G. M. ಗಳು

f) $3\frac{5}{9}$ ಮತ್ತು $40\frac{1}{2}$ ರ ನಡುವೆ 5 G. M. ಗಳು

g) $-\frac{1}{8}$ ಮತ್ತು 128 ರ ನಡುವೆ 4 G. M. ಗಳು

h) $\frac{1}{7}$ ಮತ್ತು 343 ರ ನಡುವೆ 3 G. M. ಗಳು
i) 256 ಮತ್ತು 1 ರ ನಡುವೆ 3 G. M. ಗಳು
j) $\frac{1}{12}$ ಮತ್ತು $\frac{8}{3}$ ರ ನಡುವೆ 4 G. M. ಗಳು
k) 3 ಮತ್ತು 192 ರ ನಡುವೆ 5 G. M. ಗಳು
l) 4 ಮತ್ತು $\frac{1}{16}$ ರ ನಡುವೆ 5 G. M. ಗಳು

7. G. P. ಯಲ್ಲಿರುವ 3 ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ -3 ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತ 21 ಆದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾವುವು ?

8. G. P. ಯಲ್ಲಿರುವ 4ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ 60 ಮತ್ತು ಮೊದಲ ಮತ್ತು ಕಡೇ ಸಂಖ್ಯೆಯ AM = 18 ಆದರೆ, ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾವುವು ?

9. G.P. ಯಲ್ಲಿರುವ 3 ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ -3 ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ 8 ಆದರೆ, ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾವುವು ?

10. G. P. ಯಲ್ಲಿರುವ 3 ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ 64 ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತ 84 ಆಗಿವೆ. ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾವುವು ?

11. G. P. ಯಲ್ಲಿರುವ 3 ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ 14 ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ 64 ಆದರೆ, ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾವವು?

12. ಕೆಳಗಿನ G.P.ಗಳ ಅನುತ ಪದಗಳ ವರೆಗಿನ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ,

a) $1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \cdots$ b) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots$
c) $27, 18, 12, \ldots$ d) $\frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{4}{27}, \cdots$
e) $32, -8, 2, \cdots$ f) $-1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{9}, \ldots$
g) $1, \frac{3}{4}, \frac{9}{16}, \cdots$ h) $0.8, 0.4, 0.2, \ldots$
i) $0.2, 0.02, 0.002, \ldots$ j) $\sqrt{5}+\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}-\sqrt{2}, \cdots$
k) $7, -1.4, 0.28, \ldots$ l) $1, 0.6, 0.36, \ldots$

13. ಒಂದು G.P.ಯ ಅನಂತಪದಗಳ ವರೆಗಿನ ಮೊತ್ತ 15 ಮತ್ತು ಮೊದಲಪದ 5 ಆದರೆ, ಆ G.P.ಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪ್ರಮಾಣವೆಷ್ಟು ?

14. ಒಂದು G.P.ಯ ಅನಂತ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ 10 ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ಪ್ರಮಾಣ $\frac{1}{2}$ ಆದರೆ, ಅದರ ಮೊದಲ 10 ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

15. ಒಂದು G.P.ಯ nನೆಯ ಪದವು $\frac{1}{3^{n-1}}$ ಆದರೆ, ಅದರ ಅನಂತ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

16. $x=1+a+a^2+\ldots$ ಅನಂತ ಪದಗಳು ಮತ್ತು $y=1+b+b^2+\ldots$ ಅನಂತ ಪದಗಳು ಎಂದಿರಲಿ. ($|a|<1$, $|b|<1$). $1+ab+(ab)^2$ $+(ab)^3+\cdots=\dfrac{xy}{x+y-1}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

17. ಇವುಗಳನ್ನು ಸಮಬೆಲೆಯ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯಾಗಿ ಪರಿವರ್ತಿಸಿರಿ.

a) 0.2 b) $2\cdot\dot{9}$ c) 0.1 d) $0.02\dot{3}$ e) 0.27

f) $4.\dot{1}3$ g) $0\cdot\dot{6}\dot{3}$ h) $0.43\dot{6}$ i) $0\cdot03\dot{7}$ j) $0.\dot{1}231$

18. ಕೆಳಗಿನ ಶ್ರೇಣಿಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

a) $5+55+555+5555+\ldots$

b) $9+99+999+9999+\ldots$

c) $0.8+0.88+0.8888+\ldots$

d) $0.4+0.44+0.444+\ldots$

19. ಒಂದು G. P.ಯ ಅನಂತಪದಗಳ ಮೊತ್ತ P. ಮತ್ತು ಅದರ ಪದಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತ S ಎಂದಿರಲಿ. ಈ G. Pಯ ಮೊದಲ ಪದ a ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ಪ್ರಮಾಣ r ಆದರೆ, $a\,(P^2+S)=2PS$ ಎಂದೂ ಮತ್ತು $P^2(1-r)=S(1+r)$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

20. ಕೆಳಗಿನ ಶ್ರೇಣಿಗಳಲ್ಲಿ, ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ಮೊದಲ n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

a) $3+7+15+31+63+\cdots$

b) $2+4+10+28+82+244+\ldots$

c) $a+b+3a+b^2+5a+b^3+\ldots$

8.24 ವ್ಯಾಖ್ಯೆ : $a_1\ a_2\ a_3\ a_4,\ a_5,\ldots,a_n,\ a_{n+1}\ldots$ (8.1.1)
ಎಂಬ ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. ಈ ಶ್ರೇಣಿಯ ಪದಗಳ ವಿಲೋಮ (ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮ) ಪದಗಳಿಂದಾದ ಶ್ರೇಣಿಯು, ಅಂದರೆ

$$\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \ldots, \frac{1}{a_n}, \frac{1}{a_{n+1}}, \ldots \qquad (8.24.1)$$

ಎಂಬ ಶ್ರೇಣಿಯು ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿಯಾದರೆ, ದತ್ತ (8.1.1) ನ್ನು ಹರಾತ್ಮಕ ಶ್ರೇಣಿಯೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ದತ್ತ ಶ್ರೇಣಿ (8.1.1) ಒಂದು **ಹರಾತ್ಮಕ ಶ್ರೇಣಿಯಾದಾಗ**, (8.24.1) ನ್ನು (8.1.1) ಶ್ರೇಣಿಯ **ಅನುಗತ ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿ** ಯೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಹರಾತ್ಮಕ ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು H, P. ಎಂಬ ಸಂಕೇತದಿಂದ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾ : $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$

ಈ ಶ್ರೇಣಿಯ ಪದಗಳ ವಿಲೋಮಗಳು 1,2,3,4,5,... ಎಂಬ ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸುತ್ತವೆ. ಇದು ಒಂದು A.P. ಯಾದ್ದರಿಂದ, ದತ್ತ ಶ್ರೇಣಿಯು ಒಂದು H.P. ಆಗುತ್ತದೆ.

8.25 ಟೀಕೆ : $1, \frac{1}{a}, \frac{1}{a+d}, \frac{1}{a+2d}, \frac{1}{a+3d}, \ldots$ (8.25.1)

ಎಂಬ ಶ್ರೇಣಿಯನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. ಇದು ಒಂದು H.P. ಯಾಗುತ್ತದೆ. ಏಕೆಂದರೆ, ಈ ಶ್ರೇಣಿಯ ಪದಗಳ ವಿಲೋಮಗಳ ಶ್ರೇಣಿಯಾದ

$$a, a+d \quad a+2d, a+3d, \ldots \qquad (8.3.1)$$

ಎಂಬುವದು ಸಾಮಾನ್ಯ A. P. ಯಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ (8.25.1) ನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯ H. P. ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದರ nನೆಯ ಪದವು

$$\frac{1}{a+(n-1)d}$$

ಎನ್ನುವದು ಸುಲಭವಾಗಿ ಗೊತ್ತಾಗುತ್ತದೆ (ಏಕೆ?).

8.26 ವ್ಯಾಖ್ಯೆ : a, H, b ಗಳು H.P. ಯಲ್ಲಿರುವಾಗ, H ಅನ್ನು a ಮತ್ತು bಗಳ ನಡುವಿನ ಹರಾತ್ಮಕ ಮಧ್ಯಕ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಸಂಕೇತದಲ್ಲಿ ಹರಾತ್ಮಕ ಮಧ್ಯಕವನ್ನು H. M. ಎಂದು ಬರೆದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ

a, H, b ಗಳು H. P. ಯಲ್ಲಿರಲಿ.

$\therefore \quad \frac{1}{a}, \frac{1}{H}, \frac{1}{b}$ ಗಳು A. P. ಯಲ್ಲರುತ್ತವೆ.

$\Rightarrow \quad \frac{1}{H} - \frac{1}{a} = \frac{1}{b} - \frac{1}{H}$ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ;

ಉದಾ : 2 ಮತ್ತು 8 ರ ನಡುವಿನ H. M. $= \dfrac{2(2\times 8)}{2+8} = 3.2$

8.27 ವ್ಯಾಖ್ಯೆ : $a, h_1, h_2, h_3, \ldots h_n, b$ ಗಳು H.P. ಯಲ್ಲಿರುವಾಗ $h_1, h_2, h_3, \ldots, h_n$ ಗಳನ್ನು a ಮತ್ತು b ಗಳ ನಡುವೆಯಿರುವ n H. M. ಗಳೆಂದು ಕರೆಯೋಣ.

8.28 ಉದಾ : 12 ಮತ್ತು 2 ರ ನಡುವೆ 4 H.M. ಗಳನ್ನು ಬರೆಯೋಣ ಬೇಕಾದ H. M. ಗಳು $h_1, h_2, h_3\ h_4$ ಎಂದಿರಲಿ.

$\therefore\ 2, h_1, h_2, h_3, h_4, 4$ ಎನ್ನುವದು ಒಂದು H.P.ಯಾಗುತ್ತದೆ.

ಇದರ ಅನುಗತ $A.P. : \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{h_1}, \dfrac{1}{h_2}, \dfrac{1}{h_3}, \dfrac{1}{h_4}, \dfrac{1}{12}$

ಇದರ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ d ಆದರೆ,

$\frac{1}{12} =$ ಈ AP ಯ 6 ನೆಯ ಪದ $= \frac{1}{2} + (6-1)d$

$\therefore\ 5d = \frac{1}{12} - \frac{1}{2}$ ಅಥವಾ $d = -\frac{1}{12}$

$\therefore$ ಅನುಗತ $A.P. : \frac{1}{2}, \frac{1}{2}-\frac{1}{12}, \frac{1}{2}-2\times\frac{1}{12}, \frac{1}{2}-3\times\frac{1}{12}, \frac{1}{2}-4\times\frac{1}{12}, \frac{1}{12}$

ಅಂದರೆ $\frac{1}{2}, \frac{5}{12}, \frac{4}{12}, \frac{3}{12}, \frac{2}{12}, \frac{1}{12}$

$\therefore$ ಬೇಕಾದ $H.M.$ ಗಳು : $\frac{12}{5}$, 3, 4, 6.

8. 29 ಉದಾ : a, b, c ಗಳು $A.P.$, $G.P.$ ಅಥವಾ $H.P.$ ಯಲ್ಲಿರಲಿ. ಆಗ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ (i) $\dfrac{a-b}{b-c} = \dfrac{a}{a}$ (ii) $\dfrac{a-b}{b-c} = \dfrac{a}{b}$ ಮತ್ತು $\dfrac{a-b}{b-c} = \dfrac{a}{c}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸೋಣ.

ಸಾಧನೆ : (i) ಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ;

$$\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{a} = 1 \quad \therefore\ a-b = b-c$$

$\therefore\ a\ b\ c$ ಗಳು $A.P.$ ಯಲ್ಲಿವೆ (ಏಕೆ)

(ii) ಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ :

$$\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{b} \quad \therefore\ (a-b)b = (b-c)\,a$$

$$\therefore\ ab - b^2 = ba - ca$$

$$\therefore\ -b^2 = -ca$$

$\therefore\ \dfrac{b}{a} = \dfrac{b}{c}\ \therefore\ a, b, c$ ಗಳು $G.P.$ಯಲ್ಲಿವೆ (ಏಕೆ)

(iii) ಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ :

$$(a-b)\,c = (b-c)\,a$$
$$ac-bc = ba-ca$$
$$\therefore\ ac+ca = ba+bc$$
$$\therefore\ 2\,ac = b\,(a+c)$$
$$\therefore\quad b = \frac{2\,ac}{a+c}$$

$\therefore\ b$ ಯು a ಮತ್ತು c ಗಳ ನಡುವಣ $H.M.$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ a, b, c ಗಳು $H{\cdot}P.$ ಯಲ್ಲಿವೆಯೆಂದಾಯ್ತು.

ಅಭ್ಯಾಸ 8.3

1. $a, b, c,$ ಗಳು H. P. ಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(a) $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{b-c} + \dfrac{1}{b-a}$

(b) $\dfrac{2}{b} = \dfrac{1}{b-c} + \dfrac{1}{b-a}$

(c) $(2a-b)\,(2c-b) = b^2$

2. $a, b, c, d, e,$ ಗಳು $H.P.$ ಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ $ab+bc+cd+de=4ae$

3. a, b, c, d ಗಳು $H.\ P.$ ಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ಇವುಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(a) $ab+bc+cd=3ad$ (b) $3(b-a)(d-c)=(c-b)(d-a)$

4. ಒಂದು $H.\ P.$ ಯ p ನೆಯ ಪದವು qr ಮತ್ತು q ನೆಯ ಪದವು rp ಆದರೆ, r ನೆಯ ಪದವು pq ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

5. ಒಂದು $H{\cdot}\ P.$ ಯ pನೆಯ ಪದವು q ಮತ್ತು qನೆಯ ಪದವು p ಆದರೆ $(p+q)$ ನೆಯ ಪದವು $pq/(p+q)$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

6. ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಡುವೆ ಸೂಚಿಸಿರುವಷ್ಟು $H.\ M.$ ಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

(a) 2 ಮತ್ತು 14ರ ನಡುವೆ 5 $H.\ M.$ ಗಳು

(b) $-\frac{1}{8}$ ಮತ್ತು $\frac{1}{9}$ ರ ನಡುವೆ 5 $H.\ M{\cdot}$ ಗಳು

(c) 21 ಮತ್ತು 5 ರ ನಡುವೆ 5 H. M. ಗಳು

(*d*) $-\frac{1}{7}$ ರ ಮತ್ತು $\frac{1}{24}$ ರ ನಡುವೆ 8 H. M. ಗಳು

(*e*) $\frac{1}{4}$ ಮತ್ತು $\frac{1}{44}$ ರ ನಡುವೆ 10 H. M. ಗಳು

(*f*) $\frac{1}{3}$ ಮತ್ತು $\frac{1}{4}$ ರ ನಡುವೆ 18 H. M. ಗಳು

7. ಒಂದು $H. P.$ ಯ l ನೆಯ ಪದವು a ; m ನೆಯ ಪದವು b ಮತ್ತು n ನೆಯ ಪದ c ಆದರೆ $(m-n)bc+(n-l)ca+(l-m)nab=0$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

8. a ಮತ್ತು b ಗಳ ನಡುವೆ n $H. M.$ ಗಳನ್ನು ಬರೆದರೆ, ಅವು

$$\frac{n+1}{a+nb}, \quad \frac{(n+1)ab}{2a+(n-1)b}, \quad \frac{(n+1)ab}{3a+(n-2)b}, \ldots, \frac{(n+1)ab}{na+b}$$

ಎಂದು ತೋರಿಸಿರಿ.

8·30 $A.M.$ $GM.$ ಮತ್ತು $H.M.$ ಗಳ ನಡುವೆಯಿರುವ ಸಂಬಂಧ : a, b ಎಂಬ ಎರಡು ಧನ ಸಂಕೇತಗಳ ನಡುವಿನ $A.M.$, $G.M.$ ಮತ್ತು $H.M.$ ಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ A,G ಮತ್ತು H ಆದರೆ A,G,H ಗಳು ಜ್ಯಾಮಿತಿ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ ಮತ್ತು $A\geqslant G\geqslant H$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸೋಣ.

ಸಾಧನೆ :

(i) $A=\frac{a+b}{2}$ (ii) $H=\frac{2ab}{a+b}$ (iii) $G^2=ab$ ಏಕೆ ?:

ಎಂಬುದನ್ನು ಹಿಂದೆಯೇ ಕಂಡಿದ್ದೇವೆ.

(i) × (ii) : ಇದರಿಂದ : $A\times H=\frac{a+b}{2}\cdot\frac{2ab}{a+b}=ab$

$\therefore\ AH=G^2$

ಅಂದರೆ $\frac{G}{A}=\frac{H}{G}$

$\therefore A, G, H$ ಗಳು $G.P.$ ಯಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ.

ಈಗ $A-G=\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}$

$$\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}=\frac{\sqrt{a}^2-2\sqrt{a}\sqrt{b}+\sqrt{b}^2}{2}$$

$$\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{2}\right)^2\geqslant 0 \qquad \text{(ಏಕೆ ?)}$$

$$\therefore\ A \geqslant G \qquad \therefore\ \frac{A}{G} \geqslant 1$$

ಆದರೆ $\frac{A}{G} = \frac{G}{H}$

$$\therefore\ \frac{G}{H} \geqslant 1 \text{ ಅಥವಾ } G \geqslant H$$

$$\therefore\ A \geqslant G \geqslant H$$

8.31 ಶ್ರೇಣಿಗಳಿಗೆ ಅನ್ವಯಿಸುವ ಕೆಲವು ಗುಣಗಳನ್ನು ಈಗ ಹೇಳುತ್ತೇವೆ:

a) ಒಂದು $A.P.$ ಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪದವನ್ನು ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾದ ಸ್ಥಿರಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ ಅಥವ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಫಲಿಸುವ ಶ್ರೇಣಿಯು ಕೂಡ ಒಂದು$A.P.$; ಇದರ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು ದತ್ತ $A.P.$ ಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸಕ್ಕಿಂತ ಭಿನ್ನವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

b) ಒಂದು $A.P.$ ಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪದಗಳಿಗೆ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾದ ಧನ ಅಥವಾ ಋಣ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೂಡಿದರೆ ಫಲಿಸುವ ಶ್ರೇಣಿಯು ಕೂಡ $A.P.$ ಯಾಗುತ್ತದೆ. ಈ $A.P.$ ಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು ದತ್ತ $A.P.$ ಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗುತ್ತದೆ.

c) ಒಂದು G. P. ಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪದವನ್ನು ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾದ ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ ಅಥವಾ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಫಲಿಸುವ ಶ್ರೇಣಿಯು ಒಂದು G. P. ಈ G. P. ಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪ್ರಮಾಣವು ದತ್ತ G. P. ಸಾಮಾನ್ಯ ಪ್ರಮಾಣಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಗುತ್ತದೆ.

8.32 ಉದಾ : (a) a^2, b^2, c^2 ಗಳು $A.\ P.$ ಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ, $b+c$, $c+a$, $a+b$ ಗಳು $H.\ P.$ ಯಲ್ಲಿರುತ್ತವೆಂದು ಸಾಧಿಸೋಣ.

ಸಾಧನೆ:

a^2, b^2, c^2, ಗಳು $A.\ P.$ ಯಲ್ಲಿವೆ ... [ದತ್ತ]

$\therefore\ a^2+ab+bc+ca,\ b^2+ab+bc+ca,\ c^2+ab+bc+ca$ ಗಳು $A.\ P.$ ಯಲ್ಲಿವೆ. [8.31—b) ನೋಡಿರಿ]

$(a+b)(a+c),\ (a+b)(b+c),\ (c+a)(c+b)$ ಗಳು $A.\ P.$ ಯಲ್ಲಿವೆ. $(a+b)(b+c)(c+a)$ನಿಂದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪದವನ್ನು ಭಾಗಿಸಿದರೆ.:

$\frac{1}{b+c},\ \frac{1}{c+a},\ \frac{1}{a+b}$ ಗಳು $A.P.$ ಯಲ್ಲಿವೆಯೆಂದಾಗುತ್ತದೆ. (ಏಕೆ ?).

$\therefore$ $b+c$, $c+a$, $a+b$ ಗಳು $H.P.$ ಯಲ್ಲಿವೆಯೆಂದಾಗುತ್ತದೆ.

(*b*) a, b, c ಗಳು $A.P.$ ಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ $a^2(b+c)$, $b^2(c+a)$, $c^2(a+b)$ ಗಳು ಕೂಡ $A.P.$ ಯಲ್ಲಿರುತ್ತವೆಂದು ಸಾಧಿಸೋಣ.

ಸಾಧನೆ :

$a, b, c,$ ಗಳು $A.P.$ ಯಲ್ಲಿವೆ. …… [ದತ್ತ]

$(ab+bc+ca)$ ನಿಂದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪದವನ್ನು ಗುಣಿಸುವುದರಿಂದ,

$a^2b+abc+ca^2$, ab^2+b^2c+cab, $cab+bc^2+c^2a$ ಗಳು $A.P.$ ಯಲ್ಲಿವೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪದದಿಂದ abc ಯನ್ನು ಕಳೆದರೆ a^2b+ca^2, ab^2+b^2c, bc^2+c^2a ಗಳು $A.P.$ ಯಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 8.4

1. ಇವುಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

   a) $a, b, c,$ ಗಳು $A.P.$ ಯಲ್ಲಿರುವಾಗ $\frac{b+c}{a}$, $\frac{c+a}{b}$, $\frac{a+b}{c}$ ಗಳು $A.P.$ ಯಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ.

   b) $a+b$, $b+c$, $c+a$ ಗಳು H.P.ಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ c^2, a^2, b^2 ಗಳು A.P. ಯಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ.

   c) $b-a$, $2(b-x)$, $b-c$ ಗಳು H.P. ಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ, $a-x$, $b-x$, $c-x$ ಗಳು G.P. ಯಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ.

   d) $a, b, c,$ ಗಳು H. P. ಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ, $2a-b$, b, $2c-b$ ಗಳು G.P. ಯಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ.

   e) a, b, c, d ಗಳು ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು a, b, c ಗಳು $A.P.$ ಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ಆಗ b, c, d ಗಳು $H.P.$ ಯಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ.

2. x, y, z ಗಳು A.P. ಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

   a) yz, zx, xy ಗಳು H.P. ಯಲ್ಲಿವೆ.

   b) $y+z$, $z+x$, $x+y$ ಗಳು A.P. ಯಲ್ಲಿವೆ.

   c) $\frac{1}{x}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$, $\frac{1}{y}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right)$, $\frac{1}{z}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ ಗಳು A. P. ಯಲ್ಲಿವೆ.

d) $x\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)$, $y\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right)$, $z\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ ಗಳು A. P. ಯಲ್ಲಿವೆ.

3. p, q, r ಗಳು H. P. ಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

a) $\frac{q+r}{p}$, $\frac{r+p}{q}$, $\frac{p+q}{r}$ ಗಳು A. P. ಯಲ್ಲಿವೆ.

b) $\frac{1}{p}+\frac{1}{q+r}$, $\frac{1}{q}+\frac{1}{r+p}$, $\frac{1}{r}+\frac{1}{p+q}$ ಗಳು H.P. ಯಲ್ಲಿವೆ

c) $\frac{p}{q+r-p}$, $\frac{q}{r+p-q}$, $\frac{r}{p+q-r}$ ಗಳು H. P. ಯಲ್ಲಿವೆ.

4. l, m, n ಗಳು G. P. ಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

a) $l+m$, $2m$, $m+n$ ಗಳು H. P. ಯಲ್ಲಿವೆ.

b) $log l$, $log m$, $log n$ ಗಳು A. P. ಯಲ್ಲಿವೆ;

c) $log_l x$ $log_m x$, $log_n x$ ಗಳು H. P. ಯಲ್ಲಿವೆ.

5. ಮೂರು H. P. ಯಲ್ಲಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ 37 ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ವಿಲೋಮಗಳು ಮೊತ್ತ $\frac{1}{4}$ ಅದರೆ, ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. $a^x=b^y=c^z$ ಮತ್ತು a, b, c, ಗಳು G. P. ಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ, x, y, z H. P. ಯಲ್ಲಿರುತ್ತವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

7. a, b, c, ಗಳು A. P. ಯಲ್ಲೂ, b, c, d ಗಳು G. P. ಯಲ್ಲೂ ಮತ್ತು c, d, e, ಗಳು H. P.ಯಲ್ಲೂ ಇದ್ದರೆ a, c, e, ಗಳು G.P. ಯಲ್ಲಿರುತ್ತವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

8. a, b, c, ಗಳು A.P. ಯಲ್ಲೂ c, a, b, ಗಳು H..P ಯಲ್ಲೂ ಇದ್ದರೆ, a, c, b ಗಳು G.P. ಯಲ್ಲಿರುತ್ತವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

9. ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ A.M.$=17$ ಮತ್ತು ಅದೇ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ G.M.$=15$ ಆದರೆ, ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾವುವು ?

10. ಎರಡು ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ A.M.ನಿಂದ 15 ನ್ನು ಕಳೆದರೆ, ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ G.M. ವೂ ಮತ್ತು 27 ನ್ನು ಕಳೆದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ H.M. ವೂ ಬರುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾವವು ?

11. x, y, z ಗಳು A. P. ಯಲ್ಲೂ, x, ky, z ಗಳು G. P. ಯಲ್ಲೂ ಇರುವಾಗ x, k^2y, z ಗಳು H.P. ಯಲ್ಲಿರುತ್ತವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

12. a, b, c, d ಗಳು H. P. ಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ, $\frac{a}{b+c+d}$, $\frac{b}{c+d+a}$, $\frac{c}{d+a+b}$, $\frac{d}{a+b+c}$ ಗಳು ಕೂಡ H. P. ಯಲ್ಲಿರುವವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

13. a, b, c ಗಳು H. P. ಯಲ್ಲಿರುವಾಗ $a-\frac{b}{2}$, $\frac{b}{2}$, $c-\frac{b}{2}$ ಗಳು G. P. ಯಲ್ಲಿವೆಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

14. ದತ್ತ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಡುವಿನ A. M., G. M. ಮತ್ತು H. M. ಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ x, y, z ಆಗಿವೆ. ಮತ್ತು $lx=my=nz$ ಆದರೆ l, m, n ಗಳು G. P. ಯಲ್ಲಿರುತ್ತವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

15. a, b, c ಗಳು A. P. ಯಲ್ಲಿವೆ; x, y, z ಗಳು H. P. ಯಲ್ಲಿವೆ. $\frac{a+c}{by}=\frac{x+z}{xz}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ

16. a, b, ಗಳ ನಡುವೆಯಿರುವ ಎರಡು A. M., G.M. ಮತ್ತು H.M. ಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ $a_1, a_2; g_1, g_2$ ಮತ್ತು h_1, h_2 ಆದರೆ ಇವುಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

(a) $\frac{g_1 g_2}{a_1+a_2}=\frac{h_1 h_2}{h_1+h_2}$ (b) $a_2h_1=a_1h_2=g_1g_2=ab$

17. x, y, z ಗಳು A. P. ಯಲ್ಲಿವೆ; p, q, r ಗಳು H. P. ಯಲ್ಲಿವೆ. xy, yq, zr ಗಳು G, P. ಯಲ್ಲಿವೆ. ಹೀಗಿರುವಾಗ,

$\frac{p}{r}+\frac{r}{p}=\frac{x}{z}+\frac{z}{x}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

18. x, y ಮತ್ತು z ಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ $ca \cdot ab$; ab, bc ಮತ್ತು bc, ca ಗಳ ನಡುವಿನ G. M. ಗಳಾದಾಗ, a, b, c ಗಳು A. P. ಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ, x^2, y^2, z^2 ಗಳು A. P. ಯಲ್ಲೂ ಮತ್ತು $y+z, z+x, x+y$ ಗಳು H. P. ಯಲ್ಲೂ ಇರುವವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

19. x, y, z ಗಳ ನಡುವೆಯಿರುವ 3 A. M. ಮತ್ತು 3 H. M. ಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ a_1, a_2, a_3, ಮತ್ತು h_1, h_2, h_3 ಗಳಾದರೆ, $a_2h_3=a_1h_2=a_3h_1=xy$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

20. $a, b, c,$ ಗಳು A. P. ಯಲ್ಲಿರುವಾಗ $x\ (1-a), =y(1-b) =z\ (1-c)$ ಆದರೆ, x, y, z ಗಳು H. P. ಯಲ್ಲಿವೆಯೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

21. p, q, r ಗಳು A. P. ಯಲ್ಲಿರುವಾಗ $\frac{a-x}{px} = \frac{a-y}{qy} = \frac{a-z}{rz}$

ಆದರೆ x, y, z ಗಳು H. P. ಯಲ್ಲಿರುವವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ,

22, $\frac{a-x}{px} = \frac{a-y}{qy} = \frac{a-z}{rz}$ ಆದಾಗ $x, y, z,$ ಗಳು H.P. ಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ, p, q, r ಗಳು A.P. ಯಲ್ಲಿರುವವೆಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

23. a, b, c ಗಳು A.P. ಯಲ್ಲೂ, b, c, d ಗಳು G.P. ಯಲ್ಲೂ ಮತ್ತು $c, d, e,$ ಗಳು H.P. ಯಲ್ಲೂ ಇರುವಾಗ $(2b—a)^2 = ac$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

8.33 ಸಿಗ್ಮಾ ಸಂಕೇತ : ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಗೊತ್ತಾದ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು "Σ" (ಸಿಗ್ಮಾ ಎಂದು ಓದಿ) ಎಂಬ ಸಂಕೇತವನ್ನು ಪಯೋಗಿಸಿ ಸಂಕ್ಷೇಪವಾಗಿ ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಈ ಸಂಕೇತವನ್ನು ಪಯೋಗಿಸುವ ಬಗೆಯನ್ನು ಕೆಳಗೆ ವಿವರಿಸಿದ್ದೇವೆ.

(a) $\sum_{n=1}^{8} n$: (ಸಿಗ್ಮಾ n, n ಸಮ 1 ರಿಂದ ಎಂಟು ಎಂದು ಓದಿರಿ,)

ಎಂಬ ಸಂಕೇತಕ್ಕೆ $(1+2+3+4+\ldots\ldots+8)$ ಎಂಬ ಅರ್ಥವನ್ನು ಕೊಡುತ್ತೇವೆ.

ಅಂದರೆ $\sum_{n=1}^{8} n = 1+2+3+4+5+6+7+8 = 36.$

ಇದೇ ರೀತಿ :

(b) $\sum_{n=1}^{5} n^2$: (ಸಿಗ್ಮಾ n^2, n ಸಮ 1 ರಿಂದ 5 ಎಂದು ಓದಿ), ಎಂಬ

ಸಂಕೇತಕ್ಕೆ $\sum_{n=1}^{5} n^2 = 1^2+2^2+3^2+4^2+5^2 = 55,$

ಎಂಬ ಅರ್ಥವನ್ನು ಕೊಡುತ್ತೇವೆ.

(c) $\sum_{n=1}^{10} 1 = \sum_{n=1}^{10} n^0$, ಎಂಬ ಅರ್ಥವನ್ನು ಕೊಡುತ್ತೇವೆ.

$$= 1^0 + 2^0 + 3^0 + 4^0 + 5^0 + 6^0 + 7^0 + 8^0 + 9^0 + 10^0 = 10$$ [ಏಕೆ?]

8.34 ಉದಾ :

a) $\sum_{n=1}^{4} n^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 1 + 8 + 27 + 64 = 100$

b) $\sum_{n=1}^{4} (n+1)(n+2) = \sum_{n=1}^{4} (n^2 + 3n + 2)$

$$= \sum_{n=1}^{4} n^2 + \sum_{n=1}^{4} 3n + \sum_{n=1}^{4} 2$$

$$= \sum_{n=1}^{4} n^2 + 3\sum_{n=1}^{4} n + 2\sum_{n=1}^{4} n^0$$

[ಏಕೆ ?]

$$= (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2) + 3(1 + 2 + 3 + 4) + 2(1^0 + 2^0 + 3^0 + 4^0)$$

$$= 30 + 30 + 8 = 68$$

8.35 ಟೀಕೆ : a) N ಒಂದು ಧನಪೂರ್ಣಾಂಕವಾದಾಗ

i) $\sum_{n=1}^{N} f(n) = \sum_{r=1}^{N} f(r) = \sum_{t=1}^{N} f(t)$ ... (8.35.1)

ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ ಮತ್ತು

ii) $\sum_{r=1}^{n} f(r) = \sum_{r=0}^{n-1} f(r+1)$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸೋಣ.

ಸಾಧನೆ :

$$\sum_{r=1}^{n} f(r) = \sum_{t=0}^{n-1} f(t+1) \qquad \text{[ಏಕೆ?]}$$

$$= \sum_{r=0}^{n-1} f(r+1) \quad \ldots \quad \text{[(8·35·1) ರಿಂದ]}$$

b) $\sum_{n=1}^{25} f(n) = \sum_{n=1}^{4} f(n) + \sum_{n=5}^{10} f(n) + \sum_{n=11}^{18} f(n)$

$+ \sum_{n=19}^{25} f(n)$, ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ.

c) $\sum_{n=4}^{8} n^2 = 4^2+5^2+6^2+7^2+8^2$ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ.

ಅಭ್ಯಾಸ 8.5

1. ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ತಾಳೆ ನೋಡಿರಿ :

a) $\sum_{n=1}^{12} n = \frac{12 \cdot 13}{2}$ b) $\sum_{n=1}^{n} n = \frac{n(n+1)}{2}$

c) $\sum_{n=1}^{10} n^2 = \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6}$ d) $\sum_{n=1}^{8} n^3 = \frac{8^2 \cdot 9^2}{4}$

e) $\sum_{n=1}^{5} (n^3+3n^2+3n+1) = \left(\frac{6^2 \cdot 7^2}{4} - 1\right)$

$$= \sum_{n=1}^{5} n^3 + 3\sum_{n=1}^{5} n^2 + 3\sum_{n=1}^{5} n + \sum_{n=1}^{5} 1$$

f) $\sum_{n=1}^{4} (n+1)(n+2)(n+3) = 496$

$$= \sum_{n=1}^{4} n^3 + 11\sum_{n=1}^{4} n^2 + 6\sum_{n=1}^{4} n + \sum_{n=1}^{4} 6$$

2. ಕೆಳಗಿನ ಮೊತ್ತಗಳನ್ನು Σ ಸಂಕೇತವನ್ನು ಪಯೋಗಿಸಿ ಬರೆಯಿರಿ.

a) $1+2+3+4+$ ... 15 ಪದಗಳು

b) $3+5+7+9+$ ... 18 ಪದಗಳು

c) $1+5+9+13+$ ... n ಪದಗಳು

d) $1+3+5+7+$ ... n ಪದಗಳು

e) $t_1+t_2+t_3+t_4+$ ... n ಪದಗಳು

f) $t_1^2+t_2^2+t_3^2+t_4^2+$ ... n ಪದಗಳು

g) $1\cdot3\cdot5+3\cdot5\cdot7+5\cdot7\cdot9+\ldots$ nಪದಗಳು

h) $3\cdot5\cdot8+4\cdot7\cdot11+5\cdot9\cdot14\ldots$ nಪದಗಳು

3. $$\sum_{r=0}^{n} {}_pC_r\, a^{p-n}\, b^{r+1} = \sum_{r=1}^{n+1} {}_pC_{r-1}\, a^{p-r+1}\, b^{r}$$

ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ. ಇಲ್ಲಿ ${}_pC_r$ ಎಂಬುದು r ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಸಂಬಂಧಕ ವೆಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ.

8 36 N ಎಂಬುದು ಒಂದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದಾಗ, ಕೆಳಗಿನವು ಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸೋಣ.

$$\sum_{n=1}^{N} n = 1+2+3+\ldots+N = \frac{N(N+1)}{2} \quad \ldots(8.36.1)$$

$$\sum_{n=1}^{N} n^2 = 1^2+2^2+3^2+\ldots+N^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} \quad \ldots(8.36.2)$$

$$\sum_{n=1}^{N} n^3 = 1^3+2^3+3^3+\ldots+N^3 = \frac{N^2(N+1)^2}{4} \quad \ldots(8.36.3)$$

(8.36 1)ರ ಸಾಧನೆ :

$(x+1)^2 - x^2 = 2x+1$ ಎಂಬುದು ಒಂದು ಸರ್ವ ಸಮೀಕರಣ. [ಏಕೆ?]

ಆದ್ದರಿಂದ ಇದು x ನ ಎಲ್ಲಾ ವಾಸ್ತವ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ ಯುಕ್ತವಾಗುತ್ತದೆ.
$x=1, 2, 3, 4, \dots, (N-1)$, N ಎಂದು, ಈ ಸಮೀಕರಣದ ಎರಡು ಬದಿಯಲ್ಲೂ ಆದೇಶಿಸಿ ಕೂಡೋಣ.

$x=1$ ಆದಾಗ, $(1+1)^2-1^2=2\cdot1+1$

$x=2$,, $(1+1)^2-2^2=2\cdot2+1$

$x=3$,, $(3+1)^2-3^2=2\cdot3+1$

$x=4$,, $(4+1)^2-4^2=2\cdot4+1$

$\vdots$

$x=N-1$,, $(N-1+1)^2-(N-1)^2=2(N-1)+1$

$x=N$,, $(N+1)^2-N^2=2.N+1$

$$(N+1)^2-1^2=2\{1+2+3+4+\cdots+(N-1)+N\}$$
$$+(1+1+1+\cdots+N \text{ ಪದಗಳು})$$

$$=2\sum_{n=1}^{N} n+N$$

$$\therefore\ (N+1)^2-1-N=2\sum_{n=1}^{N} n$$

ಅಂದರೆ $N^2+2N+1-1-N=N^2+N=N(N+1)=2\sum_{n=1}^{N} n$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{N} n=\frac{N(N+1)}{2}$$

(8.36.2)ರ ಸಾಧನೆ ;

$(x+1)^3 = x^3+3x^2+3x+1$ [ಏಕೆ?]

$\therefore (x+1)^3-x^3=3\cdot x^2+3\cdot x+1$ ಎಂಬುದು ಒಂದು ಸರ್ವ ಸಮೀಕರಣವಾಗುತ್ತದೆ. ಇದರಲ್ಲಿ $x=1, 2, 3, 4, \dots, N-1, N$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿ ಕೂಡೋಣ.

$(1+1)^3-1^3=3\cdot1^2+3\cdot1+1,$ $x=1$ ಆದಾಗ.

$(2+1)^3-2^3=3\cdot2^2+3\cdot2+1,$ $x=2$,,

$(3+1)^3-3^3=3\cdot3^2+3\cdot3+1,$ $x=3$,,

$$(4+1)^3 - 4^3 = 3\cdot 4^2 + 3\cdot 4 + 1, \qquad x=1 \text{ ಆದಾಗ}$$

$$\vdots$$

$$(N-1+1)^3 - (N-1)^3 = 3\cdot(N-1)^2 + 3\cdot(N-1)+1, \quad x=(N-1)$$

$$(N+1)^3 - N^3 = 3\cdot N^2 + 3\cdot N + 1, \quad x=N \text{ ಆದಾಗ.}$$

$$(N+1)^3 - 1^3 = 3\{1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+(N-1)^2+N^2\}$$

$$+3\{1+2+3+4+\dots+(N-1)+N\}+(1+1+1+1+\cdots+N \text{ ಪದಗಳು})$$

$$= 3\sum_{n=1}^{N} n^2 + 3\sum_{n=1}^{N} n + N$$

$$\therefore 3\sum_{n=1}^{N} n^2 = (1+N)^3 - 1^3 - N - 3\sum_{n=1}^{N} n$$

$$= (N+1)^3 - (N+1) - \frac{3N(N+1)}{2} \qquad \text{[ಏಕೆ?]}$$

$$= (N+1)\left\{(N+1)^2 - 1 - \frac{3N}{2}\right\}$$

$$= (N+1)\left\{\frac{2(N^2+2N+1)-2-3N}{2}\right\}$$

$$= (N+1)\frac{(2N^2+N)}{2} = \frac{(N+1)N(2N+1)}{2}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{N} n^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$

(8.36.3) ರ ಸಾಧನೆ :

$(x+1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$ [ಏಕೆ ? ಸಮರ್ಥಿಸಿರಿ].

$\therefore$ $(x+1)^4 - x^4 = 4.x^3 + 6.x^2 + 4.x + 1$ ಎಂಬುದು ಒಂದು ಸರ್ವ ಸಮೀಕರಣವಾಗುತ್ತದೆ. ಇದರಲ್ಲಿ $x = 1, 2, 3, \ldots, N$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿ ಕೂಡುವುದರಿಂದ :

$$(1+1)^4 - 1^4 = 4.1^3 + 6.1^2 + 4.1 + 1 \qquad (x=1 \text{ ಆದಾಗ})$$

$$(2+1)^4 - 2^4 = 4.2^3 + 6.2^2 + 4.2 + 1 \qquad (x=2 \quad ,, \;)$$

$$(3+1)^4 - 3^4 = 4\cdot 3^3 + 6\cdot 3^2 + 4\cdot 3 + 1 \qquad (x=3,\ \text{ಆದಾಗ})$$

$$\vdots$$

$$(N+1)^4 - N^4 = 4\cdot N^3 + 6\cdot N^2 + 4\cdot N + 1 \quad (x=N,\ \text{ಆದಾಗ})$$

$$\therefore\ (N+1)^4 - 1^4 = 4\,(1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + N^3) +$$

$$6(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + N^2) + 4(1 + 2 + 3 + \dots + N)$$

$$+ (1 + 1 + 1 + \dots + N\ \text{ಪದಗಳು})$$

$$= 4\sum_{n=1}^{N} n^3 + 6\sum_{n=1}^{N} n^2 + 4\sum_{n=1}^{N} n + N$$

$$\therefore\quad 4\sum_{n=1}^{N} n^3 = (N+1)^4 - 1 - N - \frac{6N(N+1)(2N+1)}{6} - \frac{4\,N(N+1)}{2}$$

$$= (N+1)\ \{\ (N+1)^3 - 1 - N\,(2N+1) - 2N\ \}$$

$$= (N+1)\ \{N^3 + 3N^2 + 3N + 1 - 1 - 2N^2 - N - 2N\}$$

$$= (N+1).(N^3 + N^2) = (N+1).N^2(N+1) = N^2(N+1)^2$$

$$\therefore\quad \sum_{n=1}^{N} n^3 = \frac{N^2(N+1)^2}{4}$$

ಟೀಕೆ :

$$\sum_{n=1}^{N} n^3 = \frac{N^2\,(N+1)^2}{4} = \left\{\frac{N\,(N+1)}{2}\right\}^2 = \left(\sum_{n=1}^{N} n\right)^2$$

ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ.

8. 37 ಉದಾ :

a) $1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + \dots + 25^3$, ಇದರ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ

$S = 1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + \dots + 25^3$ ಎಂದಿರಲಿ,

ಈಗ 1, 3, 5, 7, …, 25 ಎಂಬುದು ಒಂದು A. P. ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ. ಇದರ n ನೆಯ ಪದವು 25 ಆದರೆ,

$$25 = t_n = a + (n-1)d$$

$$= 1 + (n-1)2 = 2n - 1$$

$\therefore \quad 2n=25+1$ ಅಥವಾ $n=13$

$$\therefore \quad S=1^3+3^3+5^3+7^3+\cdots+25^3=\sum_{n=1}^{13} t_n$$

$$=\sum_{n=1}^{13}(2n-1)^3=\sum_{n=1}^{13}(8n^3-12n^2+6n-1)\ldots \text{[ಏಕೆ?]}$$

$$=8\sum_{n=1}^{13} n^3-12\sum_{n=1}^{13} n^2+6\sum_{n=1}^{13} n-\sum_{n=1}^{13} 1$$

$$=8\left\{\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right\}_{n=13}-12\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right\}_{n=13}+6\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}_{n=13}-13$$

$$=8.\frac{13^2\cdot 14^2}{4}-12.\frac{13\cdot 14\cdot 27}{6}+6.\frac{13\cdot 14}{2}-13$$

$= 56953$

b) $11^3+13^3+15^3+17^3+19^3+21^3+23^3+25^3$,
ಇದರ ಮೊತ್ತವೆಷ್ಟು ?

1 ನೇ ವಿಧಾನ :

ಬೇಕಾದ ಮೊತ್ತವು S ಆದರೆ,

$$S=(1^3+3^3+5^3+\cdots+25^3)-(1^3+3^3+5^3\cdots+9^3)$$
$=56953-(1^3+3^3+5^3+\ldots+9^3)$[8.37 ಉದಾ a)ನೋಡಿ]

ಈಗ $1^3+3^3+5^3+7^3+9^3=\sum_{n=1}^{5}(2n-1)^3$

$$=8\sum_{n=1}^{5} n^3-12\sum_{n=1}^{5} n^2+6\sum_{n=1}^{5} n-\sum_{n=1}^{5} n^0\ldots \text{[ಏಕೆ ?]}$$

$$=8\cdot\frac{5^2\cdot 6^2}{4}-12\cdot\frac{5\cdot 6\cdot 11}{6}+6\cdot\frac{5\cdot 6}{2}-5=1225$$

$\therefore \quad S=56953-1225=55728$

2 ನೇ ವಿಧಾನ :

$$S_1 \equiv 1^3+3^3+5^3+7^3+9^3$$
$$=(1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3+7^3+8^3+9^3)$$
$$-(2^3+4^3+6^3+8^3)$$

$$= \sum_{n=1}^{9} n^3 - \{ (2\cdot1)^3+(2\cdot2)^3+(2.3)^3+(2\cdot4)^3 \}$$

$$= \left\{ \frac{n^2 (n+1)^2}{4} \right\}_{n=9} - 2^3 (1^3+2^3+3^3+4^3)$$

$$= \frac{9^2\cdot10^2}{4} - 2^3 \cdot \frac{4^2\cdot5^2}{4} = 1225 \qquad \dots \qquad [\text{ಏಕೆ ?}]$$

ಇದೇ ರೀತಿ : $S_2 \equiv 1^3+3^3+5^3+\dots+25^3$

$$(1^3+2^3+3^3+4^3+\dots+25^3)-(2^3+4^3+6^3+\dots+24^3)$$

$$= \sum_{n=1}^{25} n^3 - 2^3 (1^3+2^3+3^3+\dots+12^3)$$

$$= \sum_{n=1}^{25} n^3 - 8\sum_{n=1}^{12} n^3 = \frac{25^2\cdot26^2}{4} - 8\,\frac{12^2\cdot13^2}{4}$$

$$= 56953$$

$\therefore \quad S=S_1-S_2=56953-1225=55728$

b) ಈಗ $\dfrac{1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+\dots \quad n \text{ ಪದಗಳು}}{1\cdot3\cdot4+2\cdot4\cdot6+3\cdot5\cdot8+\dots \quad n \text{ ಪದಗಳು}} = \dfrac{1}{2}$

ಎಂದು ಸಾಧಿಸೋಣ.

ಎಡಬದಿಯ ಅಂಶ $=P$ ಆದರೆ,

$$P=1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+\dots+(n-1)\,n\,(n+1)$$
$$+n\,(n+1)\,(n+2) \qquad [\text{ಏಕೆ ?}]$$

$$= \sum_{r=1}^{n} r(r+1)(r+2) = \sum_{r=1}^{n} (r^3+3r^2+2r)$$

$$= \sum_{r=1}^{n} r^3 + 3\sum_{r=1}^{n} r^2 + 2\sum_{r=1}^{n} r$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{3n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{2n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

ಎಡಬದಿಯ ಛೇದ $=$ Q ಆದರೆ,

$$Q = 1.3.4 + 2.4.6 + 3.5.8 + \cdots + n(n+2)(2n+2)$$

...[ಏಕೆ ?]

$$= \sum_{t=1}^{n} t(t+2)(2t+2) = \sum_{t=1}^{n} (2t^3+6t^2+4t)$$

$$= 2\sum_{t=1}^{n} t^3 + 6\sum_{t=1}^{n} t^2 + 4\sum_{t=1}^{n} t$$

$$= \frac{2n^2(n+1)^2}{4} + \frac{6n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{4n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{2}$$

$\therefore$ ಎಡಬದಿ $= \frac{P}{Q}$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} \cdot \frac{2}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$= \frac{1}{2} = \text{ಬಲಬದಿ}$$

ಅಭ್ಯಾಸ 86

ಸೂಚನೆ : ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿರಿ. (ಲೆಕ್ಕಗಳು 1—28)

1. $1^2+3^2+5^2+\dots+(2n-1)^2=\dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$.

2. $1\cdot2\cdot3+3\cdot4\cdot6+5\cdot6\cdot9+\dots+n$ ಪದಗಳು
$$=\frac{2n(n+1)(n+2)(3n-1)}{3}$$

3. $1\cdot5+2\cdot7+3\cdot9+\dots+n$ ಪದಗಳು $=\dfrac{n(n+1)(4n+1)}{6}$

4. $(2\cdot1+5\cdot3+8\cdot5+\dots+n$ ಪದಗಳು$)\ 2=n(4n^2+n-1)$

5. $1^2+2^2+3^2+\dots+60^2=73810$

6. $16^3+17^3+\dots+25^3=91225$

7. $(2\cdot3^2+4\cdot5^2+6\cdot7^2+\dots n$ ಪದಗಳು$)\ 3$
$$=n(n+1)(6n^2+14n+7)$$

8. $11^2-12^2+13^2-14^2+\dots-20^2+21^2=286$

9. $(1\cdot3\cdot5+2\cdot5\cdot7+3\cdot7\cdot9+\dots n$ ಪದಗಳು$)\ 6$
$$=n(n+1)(6n^2+22n+17)$$

10. $1^2-3^2+5^2-7^2+\dots-99^2+101^2=5201$

11. $(1\cdot3\cdot4+3\cdot6\cdot7+5\cdot9\cdot10+\dots n$ ಪದಗಳು$)\ 2$
$$=n(n+1)(9n^2+7n-4)$$

12. $40^3-39^3+38^3-37^3+\dots+2^3-1^3=33200$

13. $(2\cdot5\cdot7+3\cdot7\cdot11+4\cdot9\cdot15+\dots n$ ಪದಗಳು$)\ 6$
$$=n(12n^3+75n^2+171n+161)$$

14. $(2^3+5^3+8^3+11^3+\dots n$ ಪದಗಳು$)\ 4$
$$=n(27n^3+18n^2-9n-4)$$

15. $\{1+(1+2)+(1+2+3)+\ldots n$ ಪದಗಳು $\}\,6$
$= n(n+1)(n+2)$

16. $(3^2+7^2+11^2+15^2+\ldots n$ ಪದಗಳು$)3$
$= n\,(16n^2+12n-1)$

17. $\{1^2+(1^2+2^2)+(1^2+2^2+3^2)+\ldots n$ ಪದಗಳು $\}\,12$
$= n\,(n+1)^2(n+2)$

18. $\{1+(3+5)+(7+9+11)+\ldots n$ ಪದಗಳು $\}\,4$

$$= n^2\,(n+1)^2 = \sum_{t=1}^{n} t^3$$

19. $(1.2^2+2.3^2+3.4^2+\ldots n$ ಪದಗಳು$)12$
$= n\,(n+1)\,(n+2)\,(3n+5)$

20. $\dfrac{1.3+3.5+5.7+\ldots n \text{ ಪದಗಳು}}{1.5+3.7+5.9+\ldots n \text{ ಪದಗಳು}} = \dfrac{4n^2+6n-1}{4n^2+12n-1}$

21. $\dfrac{1.2+3.4+5.6+\ldots n \text{ ಪದಗಳು}}{1.7+2.8+3.9+\ldots n \text{ ಪದಗಳು}} = \dfrac{2\,(4n-1)}{2n+19}$

22. $\dfrac{1}{1}+\dfrac{3}{2}+\dfrac{6}{3}+\dfrac{10}{4}+\ldots n \text{ ಪದಗಳು} = \dfrac{n(n+3)}{4}$

23. $\dfrac{(2^2-1^2)+2\,(3^2-2^2)+3\,(4^2-3^2)+\ldots n \text{ ಪದಗಳು}}{1+(1+2)+(1+2+3)+\ldots n \text{ ಪದಗಳು}}$

$= \dfrac{(4n+5)}{n+2}$

24. $\dfrac{1^3}{1}+\dfrac{1^3+2^3}{2}+\dfrac{1^3+2^3+3^3}{3}+\ldots n \text{ ಪದಗಳು}$

$= \dfrac{n\,(n+1)(n+2)(3n+5)}{48}$

25. $(5^3-1^3)+(8^3-4^3)+(11^3-7^3)+\ldots n$ ಪದಗಳು
$= 2n(18n^2+27n+17)$

26. $\{2(3^2-1^2)+3(4^2-2^2)+4(5^2-3^2)+\ldots n$ ಪದಗಳು$\}\, 3$
$= 2n\,(2n^2+9n+13)$

27. $\dfrac{1.3.5+2.4.6+3.5.7+\ldots n \text{ ಪದಗಳು}}{1.2.5+3.4.7+5.6.7+\ldots n \text{ ಪದಗಳು}} = \dfrac{3(n+4)\ (n+5)}{4(6n^2+14n-5)}$

28. $\dfrac{1.4.7+2.5.8+3.6.9+\ldots n \text{ ಪದಗಳು}}{1.2.3+2.3.5+3.4.7+\ldots n \text{ ಪದಗಳು}} = \dfrac{(n+6)(n+7)}{2\,(n+1)(n+2)}$

29. ಒಂದು ಶ್ರೇಣಿಯ n ನೆಯ ಪದವು $(2n-1)(2n^2-2n+1)$ ಆದರೆ, ಆ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊದಲ n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ n^4 ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

30. ಒಂದು ಶ್ರೇಣಿಯ n ನೆಯ ಪದವು $n(4n^2-3n+1)$ ಆದರೆ, ಆ ಶ್ರೇಣಿಯ ಮೊದಲ n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ $n^3(n+1)$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.

31. $2+5+10+17+26+\ldots n$ ಪದಗಳು $=$?

ಉತ್ತರಗಳು

ಅಭ್ಯಾಸ 1.2 (ಪುಟಗಳು : 13–14)

2. (i) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$ (ii) $\{8\}$

4. (i) $\{2, 4, 6, 8\}$, $\{2, 4, 6, 8, 10\}$, $\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$, $\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$, $\{2, 4, 6, 12, 14, 16\}$, $\{2, 4, 6, 14, 16, 18\}$.

(ii) $\{4, 6\}$, $\{6\}$, Φ, $\{6, 8\}$, $\{8\}$, Φ, $\{10\}$, Φ, Φ, $\{10, 12\}$, Φ.

(iii) $\{4, 6\}$, $\{4, 6\}$, $\{2, 4, 6\}$, $\{4, 6, 8, 10\}$, Φ.

5. (i) $\{8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$ — ಇತ್ಯಾದಿ

(ii) $\{10, 12, 14, 16, 18, 20\}$

ಅಭ್ಯಾಸ 2.1 (ಪುಟ : 20)

3. (i) ಭಾಗಲಬ್ಧ (ii) ಭಾಗಲಬ್ಧ (iii) ಭಾಗಲಬ್ಧ (iv) ಅಭಾಗಲಬ್ಧ (v) ಅಭಾಗಲಬ್ಧ (vi) ಅಭಾಗಲಬ್ಧ

5. (i) $\frac{1}{5}$ (ii) $\frac{237}{999}$ (iii) $\frac{7}{9}$ (iv) $\frac{6587}{1000}$ (v) $\frac{49167}{9999}$

6. (i) $0.\overline{1428571}$ (ii) $0.18\overline{7}2$ (iii) 0.03125

(iv) $4.\overline{8461538}$ (v) $0.\overline{4}$ (vi) $0.\overline{1052631578421}$

ಅಭ್ಯಾಸ 2.2 (ಪುಟಗಳು : 26–27)

1. ಸಮರ್ಥನೆ : $1 \in I_+$ & $2 \in I_+$ ಆದಾಗ್ಯೂ $\frac{1}{2} \notin I_+$

2. ಇಲ್ಲ **3.** ಆಗಿದೆ

ಅಭ್ಯಾಸ 2.3 (ಪುಟ : 34)

2. (i) $-4 < x < -2$ (ii) $-2 < x < 1$ (iii) $-\frac{2}{3} < x < 2$

(iv) $-0.275 < x < -0.225$

ಅಭ್ಯಾಸ 2.4 (ಪುಟಗಳು : 38–39)

5. (i) $6; -36i$ (ii) $30; 9i$ (iii) $-18/49; 0i$ (iv) $0, -i$

6. (i) $0 - i(3+\sqrt{3})$ (ii) $\frac{5}{26} - \frac{1}{26}i$ (iii) $\frac{5}{287} - \frac{4}{287}i$
(iv) $\frac{11}{290} - \frac{13}{290}i$ **9.** (i) $\frac{5}{8}i$ (ii) $-8+4i$ (iii) $\pm i\sqrt{7}$
(iv) $(-1 \pm 3i)/2$

ಅಭ್ಯಾಸ 3.2 (ಪುಟಗಳು : 47–48)

1. $A \times B = \{(1, 2), (1,3)\}$; $B \times A = \{(2,1), (2,3)\}$

2. $X \times Y = \{(1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3,5)\}$;
$Y \times X = \{(4, 1), (5, 1), (4, 2), (5, 2), (4,3), (5,3)\}$;

3. $R = \{(3, 9), (3, 27), (3, 36), (9, 27), (9, 36), (12, 27), (12, 36)\}$

4. $R = \{(1, 2), (1, 4), (1, 9), (2, 2), (2,4), (3, 9)\}$

5. $= \sqrt{\quad} = \{(3, 9), (4, 16)\}$ **6.** $= \sqrt{\quad} = \phi$

7. ಯುಕ್ತ; ಅಯುಕ್ತ; ಅಯುಕ್ತ; ಅಯುಕ್ತ; ಆಯುಕ್ತ; ಅಯುಕ್ತ; ಯುಕ್ತ; ಯುಕ್ತ; ಯುಕ್ತ; ಅಯುಕ್ತ; ಯುಕ್ತ; ಅಯುಕ್ತ.

ಅಭ್ಯಾಸ 3.3 (ಪುಟಗಳು : 53–54)

2. ಸಂಬಂಧಕಗಳು — *b*) ಮತ್ತು *d*); ಇಲ್ಲಿ *d*) ಸ್ಥಿರ ಸಂಬಂಧಕ; (*e*) ಸಂಬಂಧಕವಲ್ಲ.

3. (i) ಪ್ರದೇಶ $= \{2, 4, 6, 8, 10\} =$ ಸಹಪ್ರದೇಶ,
(ii) $\{6, 8, 10\}$; (iii) $\{(2, 6), (4, 10), (6, 6), (8, 8) (10, 8)\}$ (iv) (iii) ರಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು **3.1** ರಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸಿರುವಂತೆ ಗುರ್ತಿಸಿರಿ.

4. (i), (iii) ಮತ್ತು (iv) ಸಂಬಂಧಕಗಳು; (ii) ಅಲ್ಲ.

6. (a) (i) A; (ii) B; (iii) ವ್ಯಾಪ್ತಿ $= \{1, 4, 9, 16\}$, 2 ರ ಪ್ರತಿಬಿಂಬ 4, 4 ರ ಪ್ರತಿಬಿಂಬ 16.
(b) $\{(1, 1), (2, 4), (3, 6), (4, 8)\}$ (c) ಇಲ್ಲ, ಏಕೆಂದರೆ f ಸಂಬಂಧವು $4 \in A$ ಗೆ B ಗಣದ ಯಾವ ಗಣಾಂಶವನ್ನೂ ನಿಯೋಜಿಸುವುದಿಲ್ಲ.

ಅಭ್ಯಾಸ 4.1 (ಪುಟಗಳು : 59–60)

1. ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಆಧಾರ : 2, 10, 5, a ಮತ್ತು a

ಘಾತಾಂಕ : 3, 2, 5, 4 ಮತ್ತು x

ಘಾತ : 8, 100, 3125, b ಮತ್ತು n

3. i) 9/2 ii) $p^{m^2 - n^2 - 2ml + ln + mn + l}$

ಅಭ್ಯಾಸ 4.2 (ಪುಟಗಳು 68–70)

1. (i) $\frac{3c^2}{ab}$ (ii) $\frac{x^{\frac{5}{12}} z^{\frac{1}{8}}}{y^{\frac{5}{3}}}$ (iii) $\frac{bc^{\frac{6}{5}}}{a^{\frac{4}{5}}}$ (iv) $a - 2 - \frac{1}{a}$

(v) $a^{\frac{1}{144}} \div b^{\frac{1}{144}}$

2. 2^{3^2} ದೊಡ್ಡದು **3.** (i) $x^{\frac{10}{9}} \div c^{\frac{8}{9}}$ (ii) $x \neq 0$ ಆದಾಗ 1

(iii) $\left(\frac{p}{q}\right)^{2n}$ (iv) $a \neq 0$ ಆದಾಗ 1 (v) 1

14. $(1 - x^4)$ **15.** $a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}$

16. $(x + y + z - 3x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}} z^{\frac{1}{3}})$ **17.** $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}}$

$- x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}} z^{\frac{1}{3}} - z^{\frac{1}{3}} x^{\frac{1}{3}}$

ಅಭ್ಯಾಸ 5.1 (ಪುಟಗಳು : 75–77)

1. ಹೌದು; ಹೌದು; ಅಲ್ಲ; ಅಲ್ಲ; ಹೌದು.

2. (i) $2\sqrt{2}$; $2\sqrt{3}$; $3\sqrt{3}$; $4\sqrt{2}$; $4\sqrt{3}$; $3\sqrt{6}$; $3\sqrt{2}$.

(ii) $8\sqrt{13}$; $99\sqrt{5}$; $45\sqrt{2}$; $8\sqrt{2}$.

(iii) $2\sqrt[3]{4}$; $2\sqrt[3]{3}$; $3\sqrt[3]{2}$; $5\sqrt{5}$.

3. (i) $\sqrt[10]{(14)^5}$, $\sqrt[10]{(56)^2}$ (ii) $6\sqrt[6]{(125)}$, $5\sqrt[6]{(10)}$

(iii) $\sqrt[10]{5^{-5}}$, $\sqrt[10]{625}$ (iv) $\sqrt[8]{5}$, $\sqrt[8]{81}$

(v) $\sqrt[6]{49}$, $\sqrt[6]{441}$

4. (i) $\sqrt{2}$, $\sqrt[4]{5}$, $\sqrt[3]{4}$ (ii) $\sqrt{10}$, $2\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$

(iii) $\sqrt{10}$, $3\sqrt{2}$, $2\sqrt{5}$ (iv) $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt[4]{12}$, $\sqrt{8}$

(v) $\sqrt[4]{27}$, $\sqrt[3]{50}$, $\sqrt{20}$ (vi) $\sqrt{6}$, $3\sqrt{5}$, $5\sqrt{3}$

5. (i) $13\sqrt{5}$ (ii) $7\sqrt{3}$ (iii) $17\sqrt{3}$

(iv) $6\sqrt{5}-\sqrt{10}$ (v) $2\sqrt[3]{4}$ (vi) 0 (vii) $4\sqrt[3]{x^4}$

7. (i) $\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{3^2}$; $\sqrt[11]{(11)^{10}}$; $-\sqrt[5]{4^2}$

(ii) $\sqrt{5}+\sqrt{2}$; $x\sqrt{y}+z\sqrt{w}$

(iii) $(1-\sqrt{2}+\sqrt{5})(-6-2\sqrt{10})$;

$(a-b\sqrt{c}+\sqrt{d})(a^2-b^2c-c^2d$

$-2bc\sqrt{cd})$

8. (i) 4 (ii) 10 (iii) 0 (iv) $40\sqrt{6}$ (v) $3\sqrt{7}$

(vi) $-38+21\sqrt{3}$ **9.** (i) $3\sqrt{14}+2\sqrt{21}$ (ii) 5

(iii) $2-\sqrt[3]{49}$ (iv) $162-20\sqrt{18}$ (v) $-4+2\sqrt{6}$

(vi) $p^2q+q^2p+2(pq)^{\frac{3}{2}}$ (vii) l^2m-m^2l (viii) 17

(ix) $-19+4\sqrt{15}$ (x) $132-72\sqrt{2}$

(xi) $x^2+2ax+a^2+x+a+1$ (xii) $x-11$

(xiii) $10+2\sqrt{10}+2\sqrt{6}+2\sqrt{15}$

(xiv) $10-2\sqrt{10}-2\sqrt{6}+2\sqrt{15}$

(xv) $10 - 2\sqrt{6} - 2\sqrt{15} + 2\sqrt{10}$

(xvi) 2 (xvii) -10 (xviii) $x^4 - x^2(7 + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2}) + 12 + 6\sqrt{3} - 8\sqrt{12} - 4\sqrt{6}$

ಅಭ್ಯಾಸ 5.2 (ಪುಟಗಳು : 84–85)

1. (i) $1+\sqrt{7}$ (ii) $5+\sqrt{3}$ (iii) $\sqrt{6}+\sqrt{5}$
(iv) $\sqrt{5}-2$ (v) $\sqrt{28}-\sqrt{5}$ (vi) $3+\sqrt{5}$
(vii) $\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{7}{2}}$ (viii) $\sqrt[4]{5}\,(\sqrt{2}-1)$
(ix) $(\sqrt{3}-1)/\sqrt{2}$ (x) $\sqrt[4]{3}\,(\sqrt{12}+\sqrt{5})$

2. (i) $1+\sqrt{3}$ (ii) $2-\sqrt{2}$ (iii) $(\sqrt{3}+1)/\sqrt{2}$
(iv) $2-\sqrt{3}$ (v) $\sqrt{5}-1$ (vi) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$
(vii) $(\sqrt{6}-\sqrt{2})/2\sqrt{2}$ (viii) $\sqrt{2}-1$

4. (i) $\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5}$ (ii) $2+\sqrt{5}-\sqrt{3}$
(iii) $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$ (iv) $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$
(v) $1+\sqrt{3}+\sqrt{7}$ (vi) ವರ್ಗಮೂಲ ದೊರೆಯುವುದಿಲ್ಲ.
(vii) ವರ್ಗಮೂಲ ದೊರೆಯುವುದಿಲ್ಲ. (viii) ವರ್ಗಮೂಲ ದೊರೆಯುವುದಿಲ್ಲ. **5.** 35 **6.** 2292.

ಅಭ್ಯಾಸ 6.1 (ಪುಟಗಳು : 87-88)

1. (i) $3=\log_2 8$ (ii) $2=\log_{12} 144$ (iii) $4=\log_{10} 10{,}000$ (iv) $\frac{1}{2}=\log_{256} 16$ (v) $-3=\log_{10}(1/10{,}000)$
(vi) $-2=\log_5 0.04$ (vii) $0=\log_{10} 1$ (viii) $1=\log_{10} 10$
(ix) $2=\log_{10} 100$ (x) $3=\log_{10} 1000$ (xi) $-1=\log_{10} 0.1$
(xii) $-2=\log_{10} 0.01$ (xiii) $-3=\log_{10} 0.001$

2. (i) $3^3 = 27$ (ii) $2^6 = 64$ (iii) $11^2 = 121$

(iv) $a^x = n$ (v) $10^{1.544} = 35$ (vi) $(\frac{1}{2})^5 = \frac{1}{32}$

ಅಭ್ಯಾಸ 6 2 (ಪುಟ : 88)

1. -2; 2. 6; **3.** 2; **4.** -1; **5.** 16/3; **6.** -4;
7. 7/3; **8.** 2/3.

ಅಭ್ಯಾಸ 6.4 (ಪುಟಗಳು : 100–101)

A. **1.** 1.5441 **2.** 2.0212 **3.** $\bar{3}.3222$ **4.** 4.3636
5. $\bar{1}.5490$ **6.** $\bar{2}.8215$ **7.** $\bar{1}.9279$ **8.** 0.9253
9. $\bar{3}.8452$ **10.** $\bar{1}.8908$ **11.** 0.4972 **12.** $\bar{2}.9439$
13. 1.1892.

B. **1.** 46.39 **2.** 0.2620 **3.** 504.0
4. 0.000,000,000,02760 **5.** 69.20 **6.** 292.2
7. 545,40,00,000 **8.** 0.06057 **9.** 0.4554
10. 0.00001072; **11.** 1.414

ಅಭ್ಯಾಸ 6.5 (ಪುಟಗಳು 105–107)

1. 4, 1, 2, 0, $\bar{1}$, $\bar{3}$ **2.** $\bar{6}.7153$, 3.7153, 0.7153
2.7153, 5.7153, $\bar{1}.7153$, $\bar{3}.7153$ **3.** 5, 3, 2, 1, 6
4. 1, 2, 6, 0 **5.** 1.8841, $\bar{2}.7373$, 2.6662, 2.5712,
$\bar{3}.0008$, $\bar{5}.8583$, 2.7553 **6.** 100 ಮತ್ತು 17
7. 3, 3009, 11, 16 **8.** (i) $\bar{1}.2169$ (ii) 1.4353
(iii) 3.0205 (iv) $\bar{5}.2018$ (v) $\bar{1}.0003$
(vi) $\bar{2}.9934$ **9.** 0.92745, $\bar{1}.1411$, 2.1451,
0.0726 **10.** (i) 1.80618 (ii) 1.92427
(iii) $\bar{1}.10721$ (iv) $\bar{2}.10036$ (v) 1.15836

(vi) 0·3090 (vii) 0·35973 (viii) 0·11270
(ix) $\bar{1}$·505295 **11·** 1·948445

12. (i) 0 8978 (ii) 2·054 (iii) 4157 (iv) 10·5
(v) 10·16 (vi) 25320 (vii) 960 (viii) 140·2
(ix) 12·8712 (x) 1·306 (xi) 1·306

14· (i) 9 (ii) 6 (iii) 9 **16·** 0.6738

17. 0·1781 ಮತ್ತು 5·616 **18·** (i) 3·47 (ii) 1·935
(iii) 6·131 (iv) 23630 (v) $x = 2{\cdot}661$; $y = 0{\cdot}339$

ಅಭ್ಯಾಸ 7.1 (ಪುಟಗಳು 114–115)

1· (i) ಹೌದು (ii) ಹೌದು (iii) ಹೌದು (iv) ಅಲ್ಲ (v) ಹೌದು, $a \neq a'$ ಆದಾಗ **2·** (i) 2, 3 (ii) $\frac{7}{2}, -1$ (iii) $\frac{8}{5}, \frac{4}{3}$
(iv) $(-7 \pm \sqrt{33})/4$ (v) $(9 \pm \sqrt{21})/10$ (vi) $x = \frac{1}{3}, 4$
(vii) $-\frac{3}{4}, \frac{8}{3}$ **3·** (i) $q^2 - 2r$ (ii) $q^3 - 3qr$
(iii) $\{q^3 - 3qr)/r\}$ (iv) $(q^4 - 4q^2r + 2r)$
(v) $q\sqrt{q^2 - 4r}$ (vi) $\sqrt{q^2 - 2r}\,(q^2 - r)$
(vii) $(q^4 - 4q^2r + 2r)/r$ (viii) $3q/(r + 2q^2)$ (ix) qr
(x) $q^4 - 4q^2r + 3r^2$ (xi) $(q^2 - 2r)/r$ (xii) $(q^2 - r)/r^2$
(xiii) $\sqrt{q^2 - 2r}\,(q^2 - r)/r$ (xiv) $(r^2 + 2r + 1)/r$
(xv) $2(1 - r)/(1 - q + r)$ (xvi) $(q^2 - 2r)/r^2$.

ಅಭ್ಯಾಸ 7 2 (ಪುಟಗಳು 118–119)

1 (i) ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು ಪ್ರತ್ಯೇಕ (ii) ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು ಪ್ರತ್ಯೇಕ (iii) ಮಿಶ್ರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು ಪ್ರತ್ಯೇಕ
(iv) ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು ಸಮ.

ಅಭ್ಯಾಸ 7.3 (ಪುಟಗಳು 122–124)

1· (i) $x^2 + 2x - 120 = 0$ (ii) $x^2 - (\sqrt{2} - \sqrt{11})x$

$-\sqrt{22}=0$ (iii) $x^2-2\sqrt{2}\,x-9=0$ (iv) $4x^2-8\,i\,x-7=0$ (v) $pqx^2-(p+q)(pq+1)x+(pq+1)^2=0$ (vi) $x^2-2ax+a^2-1=0$ (vii) $x^2-4x+13=0$ (viii) $x^2-2px+q=0$ (ix) $25x^2-7+4\sqrt{3}=0$ (x) $bx^2-(3ab+2)x+6a=0$ **2.** (i) $x^2-(q^2-2r)x+r^2=0$ (ii) $x^2-(q^3-3qr)\,x+r^3=0$ (iii) $x^2-(r+\sqrt{q^2-r})x+r\sqrt{q^2-r}=0$ (iv) $x^2-q\sqrt{q^2-4r}\cdot x-r^2=0$ (v) $rx^2-(q^3-3qr)x+r^2=0$ (vi) $rx^2-(q^4-4q^2r+2r)x+r^3=0$ (vii) $x^2-(q^4-4q^2r+3r^2)\,x+r^2(q^4-4q^2r+2r)=0$ (viii) $r^2x^2-(q^2-2r)x+1=0$ (ix) $rx^2-q(r+1)\,x+(r^2+2r+1)=0$ (x) $(1+q+r)\,x^2+(q^2-2r-2)\,x+1-q+r=0$ (xvi) $r^2x^2-(q^2-2r)x+1=0$ **3.** $x^2+x+1=0$

5 ಸಾಮಾನ್ಯ ಮೂಲ $=4$; 1.01 & 12.5 **6.** (i) $\propto\mp2\sqrt{6}=0$ (ii) $a+2=0,\ b\neq\infty$ (iii) $(1+3m)^2=(l+m)^2\times(1+8m)$ (iv) $7p^2=8q$ **10** $(4m-q)^2=2(2l-p)(2pm-ql)$

ಅಭ್ಯಾಸ 7.4 (ಪುಟಗಳು : 130–131)

1 (i) ಎಲ್ಲಾ ವಾಸ್ತವ ಬೆಲೆಗಳು (ii) $x<-2,\ x>3$ (ii) ಯಾವ ಬೆಲೆಗೂ ಧನವಾಗುವುದಿಲ್ಲ. (iv) $z<-8,\ z>0$ (v) $\frac{1}{3}<y<3$ **2.** (i) ಯಾವ ಬೆಲೆಗೂ ಋಣವಾಗುವುದಿಲ್ಲ (ii) $-\frac{1}{5}<x<\frac{1}{2}$ (iii) ಎಲ್ಲಾ ವಾಸ್ತವ ಬೆಲೆಗಳು (iv) $x<1,\ x>2$ **5** $(5+\sqrt{6041})/4$ **6** ಯಾವ ಬೆಲೆಯೂ ಇಲ್ಲ.

7 (i) 109/28 (ii) 81/4 (iii) $\frac{1}{2}$ (iv) 17/8

8 (i) 0 (ii) 3 (iii) —7 (iv) 9.96

ಅಭ್ಯಾಸ 8.1 ಪುಟಗಳು : (138–141)

1 (a) 3, 19 (b) $-1\frac{1}{2}$, —11 (c) 0·875, 9·125
(d) $-5a$, $-67a$ (e) $-2ab$, $a^2-6ab+b^2$ (f) $2d$, $l+7d$ (g) -2, -38 (h) -10, 144 (i) $3+x$, $44+13x$ (j) $x+y$, $19x-17y$ (k) $-2d$, $a-15d$

2 (a) 23, 144 (b) —3·5, 8·1 (c) $0\cdot\dot{3}$, $73.\dot{3}$
(d) —394 & —39, 200 (e) $\frac{1}{x}$, $\frac{2x^2+x-3}{2}$
(f) $42\sqrt{2}$, $900\sqrt{2}$ (g) 92·2, 1417·5 (h) 75, 726 (i) 64, 438 (j) $\frac{27}{5}$, 75·6 (k) p^2, $\frac{p^3+p^2}{2}$

3 (a) $a=5$, $n=16$ (b) $t_n=-48$, $S_n=-300$
(c) $d=\frac{21}{19}$, $n=20$ (d) $d=\frac{-32}{21}x$ (e) $n=16$, $t_n=49$ (f) $n=20$ ಅಥವಾ —9, $t_n=-14$
(g) $n=19$ ಅಥವಾ -21, $t_n=39$ (h) $S_n=319$
(i) $n=12$ ಅಥವಾ 24, $t_n=17$ ಅಥವಾ -11 (j) $n=17$, $S_n=442$.

4 (a) 68, 65,…,20 (b) $\frac{-77}{9}$, $-\frac{55}{9}$,…, $\frac{77}{9}$ (c) $9\frac{1}{2}$, 14, $18\frac{1}{2}$ (d) $\frac{50}{6}$, $\frac{49}{6}$, …, $\frac{15}{6}$
(e) $\frac{11}{9}$, $-\frac{14}{9}$,…, $\frac{-164}{9}$ (f) -1, -4,…, -118

(g) 14, 5, …, —49 (h) $\frac{-1822}{250}, \frac{-1769}{250}, \dots, \frac{-603}{250}$

(i) $\frac{84}{11}, \frac{124}{11}, \dots, \frac{444}{11}$ (j) $\frac{42}{11}, \frac{62}{11}, \dots, \frac{222}{11}$

5 $104.1\dot{6}$ **6** $\frac{n(10n+11)}{7}$ **7** 5050 **8** 2, 8, 14, …

9 950 **10** 1733 **11** 10, 570 **15** $p+q-m$

18 4, 11, 18 **19** −2, 4, 10 **20** −4, 3, 10 **21.** 7, 11, 15, 19, 23, **24.** 7

ಅಭ್ಯಾಸ 8·2 (ಪುಟಗಳು 148–151)

1 *a*) $2\cdot 3^5$ *b*) $2\cdot(\frac{3}{4})^3$ *c*) $\frac{1}{2}\cdot(\frac{2}{3})^6$ *d*) $5\cdot 3^9$

e) $-\frac{2}{9}\cdot(\frac{3}{2})^5$ *f*) $(-1)^{n-1}\,2^n$ *g*) $-3\times(0\cdot 1)^7$

h) $(-1)^{n-1}\,a^{-n-1}$

2 *a*) 5, $\frac{2}{3}$ *b*) 5 *c*) 1, −32, 4, … *d*) $\frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1, \dots$

e) 2^{p-1} **4** *a*) $\frac{2059}{1458}$ *b*) 10, 4 8, 5 75

c) $\frac{1281}{512}$ (*d*) $364(\sqrt{3}+1)$ *e*) $9841(\sqrt{6}+\sqrt{2})$

f) (14762)/(6561) *g*) 61 *h*) (1093)/(45)

i) $191\frac{1}{4}$ *j*) $\frac{1}{2}[585\sqrt{2}-292]$

5 a) $r=3$ ಅಥವ −4 b) $a=\frac{2}{49}$, $s_n=(5602)/49$

c) $a=\frac{3}{10}$ d) $n=6$, $a=2$ e) $r=2$, $n=7$

f) $n=5$, $a=-32$ g) $n=6$, $t_6=3\times 2^5$ h) $n=6$ $s_n=47\frac{1}{4}$ i) $n=3$

6 a) 6, 12, 24 b) $\frac{3}{2}, 1, \frac{2}{3}$ c) $-7, \frac{7}{2}, \dots, \frac{7}{32}$ d) 9 3, 1, $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}$ e) $\frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{4}{27}, \frac{8}{81}$ f) $\frac{16}{3}$, 8, 12, 18, 27

g) $\frac{1}{2}$, −2,8, −32 h) 1,7,49 i) 64,16, 4 j) $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{3}$, k) $\pm 6, 12, \pm 24, 48, \pm 96$ l) 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$,

7 —4, 2, —1 **8** 4, 8, 16, 32

9 —4, 2, —1 **10**. $\mp 8, 4, \mp 2$ **11**. 2, 4, 8

12 a) $\frac{5}{4}$ b) 2 c) 81 d) 1 e) 25·6 f) $-\frac{3}{4}$ g) 4 h) 1·6 i) $\frac{2}{9}$ j) $(7+2\sqrt{10})/(\sqrt{5}+\sqrt{2}-3)$ k) $5{\cdot}8\dot{3}$ l) 2·5 **13**. $\frac{2}{3}$ **14**. (10230/1024)

15 $\frac{3}{2}$ **17** a) $\frac{2}{9}$ b) 3 c) $\frac{1}{9}$ d) $\frac{7}{300}$ e) $\frac{27}{100}$ f) $\frac{409}{99}$ g) $\frac{7}{11}$ h) $\frac{24}{55}$ i) $\frac{37}{999}$ j) $\frac{1231}{9999}$

18 a) $\frac{5}{9}\left\{\frac{10(10^n-1)}{9}-n\right\}$ b) $\frac{10(10^n-1)}{9}-n$

c) $\frac{8}{9}\left\{n-\frac{10^n-1}{9\cdot10^n}\right\}$ d) $\frac{4}{9}\left\{n-\frac{10^n-1}{9.10^n}\right\}$

20 a) $[2^{n+2}-4-n]$ b) $\left[\frac{3^n+2n-1}{2}\right]$

c) $\left[an^2+\frac{b(b^n-1)}{b-1)}\right]$

ಅಭ್ಯಾಸ **8.3** (ಪುಟಗಳು : 154–155)

6 (*a*) $\frac{14}{6}, \frac{14}{5}, \frac{14}{4}, \frac{14}{3}, \frac{14}{2}$ (*b*) $-1, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}$

(*c*) $\frac{315}{23}, \frac{315}{31}, \frac{315}{39}, \frac{315}{47}, \frac{315}{55}$ (*d*) $\frac{9}{16}, \frac{9}{41}, \ldots, \frac{9}{191}$ (*e*) $\frac{11}{84}, \frac{11}{124}, \ldots, \frac{11}{444}$ *f*) $\frac{19}{58}, \frac{19}{59}, \ldots, \frac{19}{75}$

ಅಭ್ಯಾಸ 8. 4 (ಪುಟಗಳು : 157-160)

5 15, 12, 10 **9** 9, 25 **10** 30, 120

ಅಭ್ಯಾಸ 8. 5 (ಪುಟಗಳು : 162–163)

2. (a) $\sum_{n=1}^{15} n$ (b) $\sum_{n=1}^{18} (2n+1)$ c) $\sum_{n=0}^{n-1} (4n+1)$

(d) $\sum_{n=1}^{n} (2n-1)$ (e) $\sum_{n=1}^{n} t_n$ (f) $\sum_{n=1}^{n} t_n^2$

(g) $\sum_{n=1}^{n} (2n-1)(2n+1)(2n+3)$

(h) $\sum_{n=1}^{n} (n+2)(2n+3)(3n+5$

ಅಭ್ಯಾಸ 8.6 (ಪುಟಗಳು : 170–172)

31 $(2n^3+3n^2+7n)/6$

ಪಾರಿಭಾಷಿಕ ಪದಗಳ ಪಟ್ಟಿ

(ಕನ್ನಡ–ಇಂಗ್ಲಿಷ್)

ಸೂಚನೆ : ಪದ ಮೊದಲಸಲ ಬರುವ ಪುಟ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು, ಮುಂದೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಅ–ಆ

ಅಕರಣೀಯ ಅಪವರ್ತನ, 74	rationalizing factor
ಅನಂತ, 3	infinite
ಅಂಕಗಣಿತ ಶ್ರೇಣಿ, 132	arithmetic progression
ಅಂಕಗಣಿತ ಮಾಧ್ಯಕ, 135	arithmetic mean
ಅನುಕ್ರಮ ಮೂಲ ತತ್ವಗಳು, 29	order relation
ಆನುವರ್ತ ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆ, 37	complex conjugate
ಅನುಲೋಮ, 22	inverse
ಅಪರಿಮಿತ ಗಣ, 3	infinite set
ಅಪವರ್ತನ, 19	factor
ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ, 18	rational number
ಅಯುಕ್ತ, 45	invalid
ಅವರೋಹಣ	descending
ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆಯ ಪ್ರಮೇಯ, 29	continuity theorem
ಅಸಮತ್ವ, 31	inequality
ಅಕ್ಷ. 41	axis
ಅಂಶ, 58	numeratar
ಆಚರಣೆ, 21	operation
ಆದರೆ ಮತ್ತು ಆದಾಗ ಮಾತ್ರ,	if and only if
ಆಧಾರ, 57	base
ಆರೋಹಣ, 75	ascending
ಆವರ್ತಕ ದಶಮಾಂಶ, 17	recurring decimal
ಆವರ್ತಿಸದ, 17	non recurring
ಆವೃತ ರೇಖೆ, 17	closed curve

ಉ–ಊ

ಉಪಗಣ, 4	subset

ಊಹ್ಯಾ ಏಕ, 35	imaginary unit

ಋ

ಋಣ ಚಿಹ್ನೆ	negative sign

ಎ–ಐ

ಎರಡನೆ ಪ್ರಮಾಣದ ಕರಣಿ, 70	seeond order surd
ಎನ್ (n) ನೆಯ ಮೂಲ, 61	n^{th} noot
ಏಕ, 22	unit
ಏಕಕಾಲಿಕ	simultaneous
ಏಕೈಕ, 42	unique
ಕರಣಿ, 71	surd
ಕನಿಷ್ಠ 128,	minimum
ಕ್ರಮ ಯುಗ್ಮ, 41	ordered pair
ಗಣ, 1	set
ಗಣ ಸಿದ್ಧಾಂತ, 1	set theory
ಗಣಾಂಶ, 1	elment of a set
ಗರಿಷ್ಠ, 128	maximum
ಗುಣ ವಿಧಾನ,2	rule method
ಗುಣಕ, 109	coefficient
ಗುಣಲಬ್ಧ ಗಣ, 43	product set
ಗುಣಾಕಾರ,, 22	multiplication
ಘನಮೂಲ, 61	cube root
ಘಾತ, 57	power
ಘಾತಾಂಕ, 56	index

ಚ–ಛ

ಚರ, 108	variable
ಚಿಹ್ನೆ, 125	sign

ಛೇದ, 58	denominator
ಛೇದನ, 8	intersection

ಜ

ಜ್ಯಾಮಿತಿ ಮಧ್ಯಕ, 144	geometric mean
ಜ್ಯಾಮಿತಿ ಶ್ರೇಣಿ, 141	geometric progression

ತ

ತ್ರಿಪದ ಕರಣಿ, 31	trinomial surd
ತ್ರಿಚ್ಛೇದ ನಿಯಮ, 30	law of trichotomy

ದ

ದಶಮಾಂಶ ಪದ್ಧತಿ, 16	decimal system
ದ್ವಿಪದ ಕರಣಿ. 74	binomial surd

ನ

ನಕ್ಷೆ, 55	graph
ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ, 41	Coordinate
ನಿರಪೇಕ್ಷ ಮೌಲ್ಯ, 33	absolute value

ಪ

ಪಟ್ಟಿವಿಧಾನ, 2	tabular method
ಪ್ರಮೇಯ, 22	theorem
ಪರಿಮಿತ ಗಣ, 2	finite set
ಪರಿಮಿತ ದಶಮಾಂಶ,	finite decimal
ಪರಿವರ್ತನೀಯ, 22	commutative
ಪ್ರತಿಲೋಮ, 22	inverse
ಪ್ರತಿಘಾತ, 87	logarithm
ಪ್ರತಿಬಿಂಬ, 49	image
ಪ್ರದೇಶ, 49	domain
ಪೂರ್ಣಾಂಕ, 14	integer
ಪೂರಕಗಣ, 10	complement set

ಬ

ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ, 15	rational number
ಭಾಗಾಕಾರ, 23	division
ಬಿಡಿಸು	solve
ಭಿನ್ನರಾಶಿ	fraction
ಬೀಜಗಣಿತ	algebra
ಬೆಸಸಂಖ್ಯೆ, 18	odd number

ಮ

ಮಿಶ್ರಸಂಖ್ಯೆ, 35	complex number
ಮೂಲ, 108	root
ಮೂಲತತ್ವ, 22	axiom
ಮೂಲಬಿಂದು, 41	origin
ಮೇಲಿರುವ ಸಂಬಂಧಕ, 50	onto function
ಮೊದಲ ಪದ, 43	first term

ಯ

ಯುಕ್ತ, 45	valid

ವ

ವರ್ಗ, 18	square
ವ್ಯವಕಲನ, 23	subtraction
ವರ್ಗ ಸಂಬಂಧಕ, 55	quadratic function
ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣ, 108	quadratic equation
ವಾಸ್ತವಸಂಖ್ಯೆ, 20	real number
ವಾಹಕ ನಿಯಮ, 30	transitive rule
ವ್ಯಾಖ್ಯೆ, 1	definition
ವ್ಯಾಪ್ತಿ, 49	range
ವಿಭಾಜಕ ನಿಯಮ, 23	distributive rule
ವಿಶ್ವಗಣ, 11	universe set
ವಿಲೋಮ ಪ್ರತಿಘಾತ, 99	anti-logarithm
ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮ	reciprocal
ವೆನ್ ಚಿತ್ರಗಳು, 11	venn diagram

ಶ

ಶೂನ್ಯ, 22	zero
ಶೂನ್ಯಗಣ, 6	null set
ಶ್ರೇಣಿಗಳು, 132	series
ಶೇಷಾಂಕ, 93	mantissa
ಶೋಧಕ, 115	discriminant

ಸ

ಸಂಕಲನ, 32	addition
ಸಂಕೇತ, 6	symbol
ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆ, 27	number line
ಸಂಖ್ಯಾವ್ಯೂಹ, 15	number system
ಸಜಾತೀಯ, 72	like
ಸಂಬಂಧ, 44	relation
ಸಂಬಂಧಕ, 48	function
ಸಮಸಂಖ್ಯೆ, 18	even number
ಸಮತಳ, 41	plane
ಸಮತ್ವ (ಗಣಗಳಲ್ಲಿ), 5	equality (in sets)
ಸಮೀಕರಣ, 108	equation
ಸಮಾಂಗ ಸಂಬಂಧಕ, 112	symmetric function
ಸಂಯುಕ್ತ ಕರಣಿ, 74	compound surd
ಸರ್ವ ಸಮೀಕರಣ, 163	identity
ಸ್ವರೂಪಾಂಕ, 93	characteristic
ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ, 133	common differenee
ಸಾಮಾನ್ಯ ಪ್ರಮಾಣ, 141	common ratio
ಸಾಮಾನ್ಯ ಪ್ರತಿಘಾತ, 86	common logarilthm
ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ, 15	natural number
ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಪ್ರತಿಘಾತ, 86	natural logarithm
ಸಂಯೋಗ, 7	union
ಸರಳ ಸಂಬಂಧಕ, 55	linear function
ಸರಳ ರೂಪ, 72	simplest form
ಸಹ ಪ್ರದೇಶ, 49	co-domain

ಸಹವರ್ತನೀಯ, 22	associative
ಸ್ಥಿರಸಂಖ್ಯೆ	constant
ಸೂತ್ರ	formula

ಹ

ಹರಾತ್ಮಕ ಮಧ್ಯಕ, 152	harmonic mean
ಹರಾತ್ಮಕ ಶ್ರೇಣಿ, 152	harmonic progresson

——

ಒಪ್ಪೋಲೆ

ಪುಟ	ಸಾಲು	ತಪ್ಪು	ಒಪ್ಪು
2	9	(1·4,	(1·4·2)
5	8	1	
7	13	$\{XX \ni A$ ಅಥವಾ $X \ni B\}$	$\{X \mid X \in A$ ಅಥವಾ $X \in B\}$
8	20	B ಣಗಳೆರಡರ	B ಗಣಗಳೆರಡರ
15	9	l	I
18	5	ಸಂಖ್ಯೆಯ್ನು	ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು
20	20	$\overline{237}$	$0{\cdot}2\overline{37}$
21	18	ಆವೃತಿ	ಆವೃತ
22	11	ab	a, b
23	4	a c=b+d	a+c=b+d
23	21	2.2	2.21
27	17	30	2.30
27	21	ಬದಿಯಲ್ಲಿ	ಬಲಬದಿಯಲ್ಲಿ
27	23	OB_2	B_1B_2
28	17	$a_{q\ 1}$	a_{q-1}
34	14	$\|3X-\|2<4\|)$	$\|3X-2\|<4$
45	17	2 3	3 2
48	5	ಸಂಬಂಧದಾವಾಗ	ಸಂಬಂಧವಾದಾಗ
48	11	3B∈	3∈B
49	5	ಎಫ್ ಎಂದು	ಎಫ್ a ಎಂದು
49	6	(a, f (a)	(a, f (a))

ಪುಟ	ಸಾಲು	ತಪ್ಪು	ಒಪ್ಪು
51	6	ಸಂಬಂಧವನ್ನು	ಸಂಬಂಧಕವನ್ನು
55	17	$(-2,2)$	$(-2, -2)$
62	10	mu−∈F	m−n∈F
66	8	$\left(\frac{x^{\frac{1}{2}} a^{-\frac{2}{3}}}{x^{-\frac{1}{4}} b^{\frac{1}{3}}}\right)^2$	$\left(\frac{y^{\frac{1}{2}} a^{-\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{4}} b^{\frac{1}{3}}}\right)^2$
66	10	$\left(\frac{x^{-\frac{1}{2}} a^{-\frac{?}{9}}}{y^{-\frac{1}{3}} b^{-\frac{2}{9}}}\right)^{-1}$	$\left(\frac{x^{-\frac{1}{2}} a^{-\frac{?}{9}}}{y^{-\frac{1}{3}} b^{\frac{2}{9}}}\right)^{-1}$
66	12	$\left(y^{-\frac{1}{3}} b^{-\frac{2}{9}}\right)$	$\left(y^{-\frac{1}{3}} b^{\frac{2}{9}}\right)^{-1}$
79	24	(i) ಮತ್ತು (ii)	(i) ಮತ್ತು (iii)
81	7	$124\ 32\sqrt{15}$	$124-32\sqrt{15}$
108	4	$a'\ ,\ x^2$	$a'x^2$
112	5	$(x\ \beta)$	$(x-\beta)$
112	26	$f(\propto\ \beta)$	$f(\propto, \beta)$
116	24	$\frac{-b}{2a} \neq$ ಊಹ್ಯಸಂಖ್ಯೆ	$\frac{-b}{2a} \pm$ ಊಹ್ಯಸಂಖ್ಯೆ
125	6	$\infty < x < \beta$	$\propto < x < \beta$
134	20	$\cdots + (t_n - d)$	$\cdots (t_n - d) + t_n$
138	13	$-0{\cdot}25$	$1{\cdot}255$
139	16	$S_n = -320x$	$S_n = -380x$
142	12	ಸಪಚಿಸೋಣ	ಸೂಚಿಸೋಣ
143	7	8 16	8·16
144	9	$\sqrt{2\times2}$	$\sqrt{2\times8}$

ಪುಟ	ಸಾಲು	ತಪ್ಪು	ಒಪ್ಪು
145	2	$G,\cdot$ ಯ	$G.\ P.$ ಯ
147	3	$\left(1-\frac{1}{10^2}\right($	$\left(1-\frac{1}{10^2}\right)$
147	3	$\left(1-\frac{1}{10^3}\right($	$\left(1-\frac{1}{10^3}\right)$
147	8	$\frac{7n}{7}$	$\frac{7n}{9}$
148	7	$2, \frac{3}{2}, \frac{8}{9}, \ldots$	$2, \frac{3}{2}, \frac{9}{8}, \ldots$
148	8	$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}; \frac{2}{7}, \ldots$	$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{9}, \ldots$
148	8	1 ನೆ0ಯ ಪದ	10 ನೆಯ ಪದ
152	12	$1, \frac{1}{a}, \frac{1}{a+d},$	$\frac{1}{a}, \frac{1}{a+d}$
153	ಕೊನೆ	$\frac{b}{a}=\frac{b}{c}$	$\frac{b}{a}=\frac{c}{b}$
155	6	$(l-m)\ n\ ab$	$(l-m)ab$
155	9	$\frac{n+1}{a+nb}$	$\frac{ab(n+1)}{a+nb}$
156	11	ಪದಗಗಳಿಗೆ	ಪದಗಳಿಗೆ
160	9	$(2b-a)^2=ac$	$(2b-a)^2=ae$
163	12	$\Sigma\ {}_pC_r\ a^{p-n}\ b^{r+1}$	$\Sigma\ {}_pC_r\ a^{p-r}\ b^{r+1}$
170	2	ಅಭ್ಯಾಸ 86	ಅಭ್ಯಾಸ 8·6
171	6	$\sum_{t=1}^{n} t^3$	$4\sum_{t=1}^{n} t^3$
175	1	ಶ್ರೇಣಿಗಳು	ಉತ್ತರಗಳು

ಪ್ರತಿಘಾತಗಳು

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	ಸರಾಸರಿ ವ್ಯತ್ಯಾಸ								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7

ಪ್ರತಿಘಾತಗಳು

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	ಸರಾಸರಿ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	9542	9517	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4

ವಿಲೋಮ ಪ್ರತಿಘಾತಗಳು

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	ಸರಾಸರಿ ವ್ಯತ್ಯಾಸ								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
·00	1000	1002	1005	1007	1009	1012	1014	1016	1019	1021	0	0	1	1	1	1	2	2	2
·01	1023	1026	1028	1030	1033	1035	1038	1040	1042	1045	0	0	1	1	1	1	2	2	2
·02	1047	1050	1052	1054	1057	1059	1062	1064	1067	1069	0	0	1	1	1	1	2	2	2
·03	1072	1074	1076	1079	1081	1084	1086	1089	1091	1094	0	0	1	1	1	1	2	2	2
·04	1096	1099	1102	1104	1107	1109	1112	1114	1117	1119	0	1	1	1	1	2	2	2	2
·05	1122	1125	1127	1130	1132	1135	1138	1140	1143	1146	0	1	1	1	1	2	2	2	2
·06	1148	1151	1153	1156	1159	1161	1164	1167	1169	1172	0	1	1	1	1	2	2	2	2
·07	1175	1178	1180	1183	1186	1189	1191	1194	1197	1199	0	1	1	1	1	2	2	2	2
·08	1202	1205	1208	1211	1213	1216	1219	1222	1225	1227	0	1	1	1	1	2	2	2	3
·09	1230	1233	1236	1239	1242	1245	1247	1250	1253	1256	0	1	1	1	1	2	2	2	3
·10	1259	1262	1265	1268	1271	1274	1276	1279	1282	1285	0	1	1	1	1	2	2	2	3
·11	1288	1291	1294	1297	1300	1303	1306	1309	1312	1315	0	1	1	1	2	2	2	2	3
·12	1318	1321	1324	1327	1330	1334	1337	1340	1343	1346	0	1	1	1	2	2	2	2	3
·13	1349	1352	1355	1358	1361	1365	1368	1371	1374	1377	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·14	1380	1384	1387	1390	1393	1396	1400	1403	1406	1409	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·15	1413	1416	1419	1422	1426	1429	1432	1435	1439	1442	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·16	1445	1449	1452	1455	1459	1462	1466	1469	1472	1476	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·17	1479	1483	1486	1489	1493	1496	1500	1503	1507	1510	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·18	1514	1517	1521	1524	1528	1531	1535	1538	1542	1545	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·19	1549	1552	1556	1560	1563	1567	1570	1574	1578	1581	0	1	1	1	2	2	3	3	3
·20	1585	1589	1592	1596	1600	1603	1607	1611	1614	1618	0	1	1	1	2	2	3	3	3
·21	1622	1626	1629	1633	1637	1641	1644	1648	1652	1656	0	1	1	2	2	2	3	3	3
·22	1660	1663	1667	1671	1675	1679	1683	1687	1690	1694	0	1	1	2	2	2	3	3	3
·23	1698	1702	1706	1710	1714	1718	1722	1726	1730	1734	0	1	1	2	2	2	3	3	4
·24	1738	1742	1746	1750	1754	1758	1762	1766	1770	1774	0	1	1	2	2	2	3	3	4
·25	1778	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816	0	1	1	2	2	2	3	3	4
·26	1820	1824	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858	0	1	1	2	2	3	3	3	4
·27	1862	1866	1871	1875	1879	1884	1888	1892	1897	1901	0	1	1	2	2	3	3	3	4
·28	1905	1910	1914	1919	1923	1928	1932	1936	1941	1945	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·29	1950	1954	1959	1963	1968	1972	1977	1982	1986	1991	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·30	1995	2000	2004	2009	2014	2018	2023	2028	2032	2037	0	1	1	2	2	3	3	4	4
31	2042	2046	2051	2056	2061	2065	2070	2075	2080	2084	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·32	2089	2094	2099	2104	2109	2113	2118	2123	2128	2133	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·33	2138	2143	2148	2153	2158	2163	2168	2173	2178	2183	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·34	2188	2193	2198	2203	2208	2213	2218	2223	2228	2234	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·35	2239	2244	2249	2254	2259	2265	2270	2275	2280	2286	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·36	2291	2296	2301	2307	2312	2317	2323	2328	2333	2339	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·37	2344	2350	2355	2360	2366	2371	2377	2382	2388	2393	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·38	2399	2404	2410	2415	2421	2427	2432	2438	2443	2449	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·39	2455	2460	2466	2472	2477	2483	2489	2495	2500	2506	1	1	2	2	3	3	4	5	5
·40	2512	2518	2523	2529	2535	2541	2547	2553	2559	2564	1	1	2	2	3	4	4	5	5
·41	2570	2576	2582	2588	2594	2600	2606	2612	2618	2624	1	1	2	2	3	4	4	5	5
·42	2630	2636	2642	2649	2655	2661	2667	2673	2679	2685	1	1	2	2	3	4	4	5	6
·43	2692	2698	2704	2710	2716	2723	2729	2735	2742	2748	1	1	2	3	3	4	4	5	6
·44	2754	2761	2767	2773	2780	2786	2793	2799	2805	2812	1	1	2	3	3	4	4	5	6
·45	2818	2825	2831	2838	2844	2851	2858	2864	2871	2877	1	1	2	3	3	4	5	5	6
·46	2884	2891	2897	2904	2911	2917	2924	2931	2938	2944	1	1	2	3	3	4	5	5	6
·47	2951	2958	2965	2972	2979	2985	2992	2999	3006	3013	1	1	2	3	3	4	5	5	6
·43	3020	3027	3034	3041	3048	3055	3062	3069	3076	3083	1	1	2	3	4	4	5	6	6
·49	3090	3097	3105	3112	3119	3126	3133	3141	3148	3155	1	1	2	3	4	4	5	6	6

ವಿಲೋಮ ಪ್ರತಿಘಾತಗಳು

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	ಸರಾಸರಿ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 1	2	3	4	5	6	7	8	9
·50	3162	3170	3177	3184	3192	3199	3206	3214	3221	3228	1	1	2	3	4	4	5	6	7
·51	3236	3243	3251	3258	3266	3273	3281	3289	3296	3304	1	2	2	3	4	5	5	6	7
·52	3311	3319	3327	3334	3342	3350	3357	3365	3373	3381	1	2	2	3	4	5	5	6	7
·53	3388	3396	3404	3412	3420	3428	3436	3443	3451	3459	1	2	2	3	4	5	6	6	7
·54	3467	3475	3483	3491	3499	3508	3516	3524	3532	3540	1	2	2	3	4	5	6	6	7
·55	3548	3556	3565	3573	3581	3589	3597	3606	3614	3622	1	2	2	3	4	5	6	7	7
·56	3631	3639	3648	3656	3664	3673	3681	3690	3698	3707	1	2	3	3	4	5	6	7	8
·57	3715	3724	3733	3741	3750	3758	3767	3776	3784	3793	1	2	3	3	4	5	6	7	8
·58	3802	3811	3819	3828	3837	3846	3855	3864	3873	3882	1	2	3	4	4	5	6	7	8
·59	3890	3899	3908	3917	3926	3936	3945	3954	3963	3972	1	2	3	4	5	5	6	7	8
·60	3981	3990	3999	4009	4018	4027	4036	4046	4055	4064	1	2	3	4	5	6	6	7	8
·61	4074	4083	4093	4102	4111	4121	4130	4140	4150	4159	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·62	4169	4178	4188	4198	4207	4217	4227	4236	4246	4256	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·63	4266	4276	4285	4295	4305	4315	4325	4335	4345	4355	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·64	4365	4375	4385	4395	4406	4416	4426	4436	4446	4457	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·65	4467	4477	4487	4498	4508	4519	4529	4539	4550	4560	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·66	4571	4581	4592	4603	4613	4624	4634	4645	4656	4667	1	2	3	4	5	6	7	9	10
·67	4677	4688	4699	4710	4721	4732	4742	4753	4764	4775	1	2	3	4	5	7	8	9	10
·68	4786	4797	4808	4819	4831	4842	4853	4864	4875	4887	1	2	3	4	6	7	8	9	10
·69	4898	4909	4920	4932	4943	4955	4966	4977	4989	5000	1	2	3	5	6	7	8	9	10
·70	5012	5023	5035	5047	5058	5070	5082	5093	5105	5117	1	2	4	5	6	7	8	9	11
·71	5129	5140	5152	5164	5176	5188	5200	5212	5224	5236	1	2	4	5	6	7	8	10	11
·72	5248	5260	5272	5284	5297	5309	5321	5333	5346	5358	1	2	4	5	6	7	9	10	11
·73	5370	5383	5395	5408	5420	5433	5445	5458	5470	5483	1	3	4	5	6	8	9	10	11
·74	5495	5508	5521	5534	5546	5559	5572	5585	5598	5610	1	3	4	5	6	8	9	10	12
·75	5623	5636	5649	5662	5675	5689	5702	5715	5728	5741	1	3	4	5	7	8	9	10	12
·76	5754	5768	5781	5794	5808	5821	5834	5848	5861	5875	1	3	4	5	7	8	9	11	12
·77	5888	5902	5916	5929	5943	5957	5970	5984	5998	6012	1	3	4	5	7	8	10	11	12
·78	6026	6039	6053	6067	6081	6095	6109	6124	6138	6152	1	3	4	6	7	8	10	11	13
·79	6166	6180	6194	6209	6223	6237	6252	6266	6281	6295	1	3	4	6	7	9	10	11	13
·80	6310	6324	6339	6353	6368	6383	6397	6412	6427	6442	1	3	4	6	7	9	10	12	13
·81	6457	6471	6486	6501	6516	6531	6546	6561	6577	6592	2	3	5	6	8	9	11	12	14
·82	6607	6622	6637	6653	6668	6683	6699	6714	6730	6745	2	3	5	6	8	9	11	12	14
·83	6761	6776	6792	6808	6823	6839	6855	6871	6887	6902	2	3	5	6	8	9	11	13	14
·84	6918	6934	6950	6966	6982	6998	7015	7031	7047	7063	2	3	5	6	8	10	11	13	15
·85	7079	7096	7112	7129	7145	7161	7178	7194	7211	7228	2	3	5	7	8	10	12	13	15
·86	7244	7261	7278	7295	7311	7328	7345	7362	7379	7396	2	3	5	7	8	10	12	13	15
·87	7413	7430	7447	7464	7482	7499	7516	7534	7551	7568	2	3	5	7	9	10	12	14	16
·88	7586	7603	7621	7638	7656	7674	7691	7709	7727	7745	2	4	5	7	9	11	12	14	16
·89	7762	7780	7798	7816	7834	7852	7870	7889	7907	7925	2	4	5	7	9	11	13	14	16
·90	7943	7962	7980	7998	8017	8035	8054	8072	8091	8110	2	4	6	7	9	11	13	15	17
·91	8128	8147	8166	8185	8204	8222	8241	8260	8279	8299	2	4	6	8	9	11	13	15	17
·92	8318	8337	8356	8375	8395	8414	8433	8453	8472	8492	2	4	6	8	10	12	14	15	17
·93	8511	8531	8551	8570	8590	8610	8630	8650	8670	8690	2	4	6	8	10	12	14	16	18
·94	8710	8730	8750	8770	8790	8810	8831	8851	8872	8892	2	4	6	8	10	12	14	16	18
·95	8913	8933	8954	8974	8995	9016	9036	9057	9078	9099	2	4	6	8	10	12	15	17	19
·96	9120	9141	9162	9183	9204	9226	9247	9268	9290	9311	2	4	6	8	11	13	15	17	19
·97	9333	9354	9376	9397	9419	9441	9462	9484	9506	9528	2	4	7	9	11	13	15	17	20
·98	9550	9572	9594	9616	9638	9661	9683	9705	9727	9750	2	4	7	9	11	13	16	18	20
·99	9772	9795	9817	9840	9863	9886	9908	9931	9954	9977	2	5	7	9	11	14	16	18	20

ಆಧಾರ ಗ್ರಂಥಗಳ ಪಟ್ಟಿ

1. Alwin K. Bettinger & John A. Englund., **Algebra and Trigonometry**. Secraton: International Text Book Co , 1963.

2. Barnard S. and Child J. M , **Higher Algebra**. London : Macmillain and Co. Ltd., 1965.

3. Hall H. S. & Kight S. R., **Higher Algebra**. London : Macmillain & Co., Ltd., 1946.

4. Myra McFadden., **Sets Relations and Functions**. Newyork : Mc. Graw - Hill Book Co., Inc., 1963.

5 Pavate, D. C., **Modern Algebra for P. U. C. Classes**. Madras : Macmillian & Co., 1969.

6. Rees and Sparks., **Intermediate Algebra**. Toronto : McGraw - Hill Book Co., Inc., 1937.

7. Richard V. Andree., **Selection from Modern Abstract Algebra**. Chicago : Holt Rinehart & Winston., 1963.

8. Robert L Swain., **Understanding Arithmetic**. New York : Holt Rinehart and Winston, 1957.

9. Ross P., **Elementary Algebra (Part II)**. Madras : Orient Longmans, 1963.

10. Dr. Sampathkumar., **A Text Book of Mathematics for first year P. U. C.**. Hubli : Book Centre, 1971.

11. Seymour Lipschutz., **Set theory and related topics**. New York : Schaum Publishing Co., 1964.

12. Shah N. M. and Desai C. M., **College Algebra**. Surath Karsondas Narandas and Sons., 1954.

13. Shah K. N. & Rev. Fr. G. G. valles., **College Algebra**. Anand. Charotar Book Stall, 1964.

14. —., **P.U.C. Mathematics, Part I, Algebra & Elementary Calculus**. Bangalore University, 1971.

15. ಅಮೂರ ಕೆ. ಎಸ್. ಮತ್ತು ಇತರರು.,
ಬೀಜಗಣಿತ–ಕಲನಶಾಸ್ತ್ರ ಪರಿಚಯ.
ಧಾರವಾಡ : ಕರ್ನಾಟಕ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯ, 1969.

16. ದೊರೆಸ್ವಾಮಿ ವಿ. ಕೆ., **ಬೀಜಗಣಿತ.**
ಮೈಸೂರು : ಮೈಸೂರು ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯ, 1958.

17. ಪ್ರಾಣೇಶರಾವ್ ಪಿ. ಆರ್., **ಬೀಜಗಣಿತ.**
ಮೈಸೂರು : ಬೆಂಗಳೂರು ಮುದ್ರಣಾಲಯ, ಮೈಸೂರು ವಿಭಾಗ, 1958.

ಕೃಷಿ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾನಿಲಯದ ಕನ್ನಡ ಪ್ರಕಟಣೆಗಳು

		ಸಾದಾ	ಕ್ಯಾಲಿಕೊ
1·	ಸುಭಿಕ್ಷತೆಗೆ ತೆರೆದ ಬಾಗಿಲು	2–50*	
2·	ಪೀಡೆ ನಿರ್ವಹಣೆ	5–00*	
3·	ಕೀಟ ವಿಂಗಡಣೆ	15–00*	
4·	ಕೀಟ ಹತೋಟಿ (ದ್ವಿತೀಯ ಮುದ್ರಣ)	12–50	
5·	ಸಾಕುಪ್ರಾಣಿಗಳ ಶರೀರ ಕ್ರಿಯಾಶಾಸ್ತ್ರ ಭಾಗ-1	6–25	
6·	ತರಕಾರಿ ಬೇಸಾಯ	12–50	
7·	ಕೃಷಿ ರಸಾಯನ ಶಾಸ್ತ್ರ ಶಬ್ದಾರ್ಥ ನಿರೂಪಣಾವಳಿ	5–00	6–25*
8·	ಮಣ್ಣು ಮತ್ತು ನೀರು ಸಂರಕ್ಷಣಾ ಕೈಪಿಡಿ	15–00	19–00
9·	ರೈತರ ನೆಚ್ಚು ಮೆಚ್ಚಿನ ಮರಗಳು	15–00	19–00
10.	ಸಾಕು ಪ್ರಾಣಿಗಳ ಶರೀರ ಕ್ರಿಯಾಶಾಸ್ತ್ರ, ಭಾಗ-2	11–25	15–00
11·	ಬೀಜಗಣಿತ ಪರಿಚಯ ಭಾಗ–1	15–00	20–00
12·	ಮಣ್ಣು ಮತ್ತು ನೀರು ನಿರ್ವಹಣೆ	15–00	19–00*
13·	ಮಣ್ಣು	11–25	15–00*
14·	ಕೃಷಿ ಸಹಕಾರ	6–25	10–00*
15·	ಕಳೆಗಳು ಮತ್ತು ಕಳೆಗಳ ನಿಯಂತ್ರಣ	15–00	19–00*
16·	ಗೋಸಂಪತ್ತು	6–25	10–00*
17·	ಧಾನ್ಯದಾಸ್ತಾನುತತ್ವ ಮತ್ತು ಪದ್ಧತಿಗಳು	7–50	11–25
18·	ಮಣ್ಣಿನ ಫಲವತ್ತತೆ ಹಾಗೂ ಉತ್ಪಾದಕತೆ	17–50	21–25*
19·	ಪಶು ವೈದ್ಯಕೀಯ ವಿಜ್ಞಾನ	7–50	11–25*
20·	ಹೊಲದ ಬೆಳೆಗಳಿಗೆ ಬೀಳುವ ಕೆಲವು ಕೀಟಗಳು	8–25	12–00
21·	ಟ್ರ್ಯಾಕ್ಟರು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳನ್ನು ಸುಸ್ಥಿತಿಯಲ್ಲಿಡುವ ಕ್ರಮಗಳು	7–50	12–50
22·	ಸಾಕುಪ್ರಾಣಿಗಳ ಶರೀರ ಕ್ರಿಯಾಶಾಸ್ತ್ರ, ಭಾಗ-3	10–00	15–00
23·	ಕೃಷಿ ವಿಸ್ತರಣ ಶಿಕ್ಷಣ ಪದ್ಧತಿಗಳು	11–25	16–25
24.	ಕಣಜದ ಪೀಡೆಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಪತೋಟಿ	15–00	19–00
25·	ಸಸ್ಯವರ್ಗೀಕರಣಶಾಸ್ತ್ರ	15–00	20–00
26·	ಪೌಷ್ಟಿಕ ಆಹಾರ	9–00	14–00
27·	ಕಡಲ ಮೀನುಗಾರಿಕೆ	5–00	10–00

* ಪ್ರತಿಗಳು ತೀರಿವೆ

		ಸಾದಾ	ಕ್ಯಾಲಿಕೊ
28.	ಧಾನ್ಯದ ಬೆಳೆಗಳಿಗೆ ಬೀಳುವ ಕೀಟಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಹತೋಟಿ	10–75	
29.	ಕಬ್ಬಿನ ಬೆಳೆಗಳಿಗೆ ಬೀಳುವ ಕೀಟಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಹತೋಟಿ	4–50	
30.	ಶಿಶುವಿಹಾರ (ದ್ವಿತೀಯ ಮುದ್ರಣ)	6–00	
31.	ಬೇಳೆಕಾಳು ಬೆಳೆಗಳಿಗೆ ಬೀಳುವ ಕೀಟಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಹತೋಟಿ	7–50	
32.	ಕೃಷಿ ಎಂಜಿನಿಯರಿಂಗ್ ಪಠ್ಯ ಪುಸ್ತಕ ಸಮೀಕ್ಷಣೆ	9–50	14–00
33.	ಇಲಿಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ನಿಯಂತ್ರಣ	9–50	13–25
34.	ತರಕಾರಿ ಬೆಳೆಗಳಿಗೆ ಬೀಳುವ ಕೀಟಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಹತೋಟಿ	12–50	
35.	ಹಣ್ಣಿನ ಬೆಳೆಗಳಿಗೆ ಬೀಳುವ ಕೀಟಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಹತೋಟಿ	16–25	
36.	ಕ್ಯಾನಿಂಗ್ — ಆಹಾರ ಜೋಪಾಸನೆಯ ಒಂದು ಆಧುನಿಕ ವಿಧಾನ	16–25	21–25
37.	ಅಲಂಕಾರ ಸಸ್ಯಗಳಿಗೆ ಬೀಳುವ ಕೀಟಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಹತೋಟಿ	10–75	
38.	ಜೀವಕೋಶ ಕ್ರಿಯಾಶಾಸ್ತ್ರ ಮತ್ತು ಜೀವ ರಸಾಯನ ಶಾಸ್ತ್ರ	20–00	25–00
39.	ಎಲುಬುಶಾಸ್ತ್ರ	11–25	16–25
40.	ಕಡಲೆಕಾಯಿ	10–00	15–00
41.	ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ಪ್ರವೇಶಿಕೆ ಭಾಗ–1	25–00	30–00
42.	ತೆಂಗು, ಅಡಿಕೆ, ಇತರ ಗರಿಮರಗಳಿಗೆ ಬೀಳುವ ಕೀಟಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಹತೋಟಿ	9–00	
43.	ಪ್ಲಾಂಟೇಶನ್ ಬೆಳೆಗಳಿಗೆ ಬೀಳುವ ಕೀಟಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಹತೋಟಿ	12–00	
44.	ಭಾರತದಲ್ಲಿ ಕೋಳಿಸಾಕಣೆ	22–50	27–50
45.	ಕಲ್ಲುನಾರು (ಭೂತಾಳೆ) ಗಿಡಗಳು	5–00	
46.	ಎಣ್ಣೆಬೀಜ (ಕಾಳು) ಗಳ ಬೆಳೆಗಳಿಗೆ ಬೀಳುವ ಕೀಟಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಹತೋಟಿ	7–50	
47.	ಹತ್ತಿ (ನೂಲು), ನಾರಿನ ಬೆಳೆಗಳಿಗೆ ಬೀಳುವ ಕೀಟಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಹತೋಟಿ	10–00	

		ಸಾದಾ	ಕ್ಯಾಲಿಕೊ
48.	ಹಸುರೆಲೆ ಗೊಬ್ಬರ, ಮೇವು ಹಾಗೂ ಉಪ್ಪುನೇರಿಳೆ ಬೆಳೆಗಳಿಗೆ ಬೀಳುವ ಕೀಟಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಹತೋಟಿ	5–00	
49.	ಮಾದಕ (ಹೊಗೆಸೊಪ್ಪು, ಗಾಂಜ) ಮತ್ತು ಸಾಂಬಾರ (ಅರಿಶಿನ ಇತ್ಯಾದಿ) ಬೆಳೆಗಳಿಗೆ ಬೀಳುವ ಕೀಟಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಹತೋಟಿ	3–75	
50.	ಕೃಷಿ ಉಪಯೋಗಿ ಕೆಲವು ವೃಕ್ಷಗಳಿಗೆ ಬೀಳುವ ಕೀಟಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಹತೋಟಿ	4–50	
51.	ಸಸ್ಯಸಾಮ್ರಾಜ್ಯ	25–00	30–00
52.	ಮೀನುಗಾರಿಕೆ	10–00	15–00
53.	ಭಾರತೀಯ ಗ್ರಾಮೀಣ ಯುವಕ ರೈತ ಸಂಘಟನೆ	8–25	13–25
54.	ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ ಪ್ರವೇಶಿಕೆ, ಭಾಗ-2	20–00	25–00
55.	ಸಾವಯವ ರಸಾಯನಶಾಸ್ತ್ರ ಪ್ರವೇಶಿಕೆ	14–00	19–00
56.	ಪಶುರೋಗಗಳು ಮತ್ತು ಸಾರ್ವಜನಿಕ ಆರೋಗ್ಯ	12–50	17–50
57.	ಭಾರತದಲ್ಲಿ ಜೇನುಸಾಕಣೆ	20–00	25–00
58.	ಸಾಕುಪ್ರಾಣಿ ಮೂಲದ ಸೋಂಕುರೋಗಗಳು	7–50	12–00
59.	ದೊಡ್ಡ ರೋಗ	5–00	
60.	ಮೂಲ ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರ	19–00	24–00
61.	ಜೇನುಸಾಕಣೆ	17–50	22–50
62.	ಕೃಷಿರಸಾಯನಶಾಸ್ತ್ರ ಪಾರಿಭಾಷಿಕ ಶಬ್ದಕೋಶ	3–25	
63.	ಮಣ್ಣು ನಿರ್ವಹಣೆ, ಸಂರಕ್ಷಣೆ ಹಾಗೂ ಬೆಳೆ ಉತ್ಪಾದನೆ		(ಅಚ್ಚಿನಲ್ಲಿದೆ)
64.	ಕೃಷಿ ಅನಿಲಯಂತ್ರ ಹಾಗೂ ಟ್ರಾಕ್ಟರುಗಳು		60–00
65.	ಸಹಕಾರಿ ಬೇಸಾಯ	18–00	23–00
66.	ಕೋಶ	20–00	25–00
67.	ತರಕಾರಿ ಬೆಳೆಗಳ ಕೀಟ ನಿಯಂತ್ರಣ	12–50	19–00
68.	ಸಾಕುಪ್ರಾಣಿಗಳ ಭ್ರೂಣಶಾಸ್ತ್ರ	20–00	25–00
69.	ಸಂಸ್ಕೃತಿಯ ರೂಪಿಕೆಗಳು	17–00	22–00
70.	ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬೀಜಗಣಿತ	30–00	35–00
71.	ಹುಲಿ—ಭಾರತದ ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಮೃಗ	20–00	24–00
72.	ನೀರಾವರಿ ತತ್ವ ಹಾಗೂ ಪದ್ಧತಿಗಳು	45–00	50–00
73.	ಮಣ್ಣು ಶಿಲೀಂದ್ರ ಕೈಪಿಡಿ		(ಅಚ್ಚಿನಲ್ಲಿದೆ)

		ಸಾದಾ	ಕ್ಯಾಲಿಕೊ
74.	ಪ್ರಾಣಿಗಳ ವರ್ತನೆ	17–00	22–00
75.	ಬೆಳೆ ಕೀಟಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಹತೋಟಿ		125–00
76.	ಸಸ್ಯತಳಿ ಅಭಿವೃದ್ಧಿ ವಿಧಾನಗಳು		60–00
77.	ಪ್ರಾಣಿಗಳ ಶರೀರ ಕ್ರಿಯಾಶಾಸ್ತ್ರ	17–00	22–00
78.	ಆಹಾರ ಸೂಕ್ಷ್ಮಜೀವಿ ವಿಜ್ಞಾನದಲ್ಲಿ ಪ್ರಾಮುಖ್ಯತೆ ಗಳಿಸಿರುವ ಸೂಕ್ಷ್ಮ ಜೀವಿಗಳು(ಆಹಾರ ಸೂಕ್ಷ್ಮಜೀವಿ ವಿಜ್ಞಾನ ಭಾಗ–1)	8–50	
79.	ಕೆಲವು ಸಸ್ಯಗಳ ವೈಜ್ಞಾನಿಕ, ಇಂಗ್ಲೀಷ್ ಹಾಗೂ ಕನ್ನಡ ಹೆಸರುಗಳು		(ಅಚ್ಚಿನಲ್ಲಿದೆ)
80.	ಮೀನು ಮತ್ತು ಇತರ ಸಾಗರೋತ್ಪನ್ನ ಆಹಾರಗಳ ಶೀತ ಜೋಪಾಸನೆ	20–00	25–00
81.	ಸಾಕುಪ್ರಾಣಿಗಳ ಕೀಲು ಮತ್ತು ಸ್ನಾಯುಶಾಸ್ತ್ರ		(ಅಚ್ಚಿನಲ್ಲಿದೆ)
82.	ಕುರಿಸಾಕಣೆ	8–00	13–00
83.	ಜೋಳ	10–00	15–00
84.	ಹಂದಿ ಭ್ರೂಣಶಾಸ್ತ್ರ	35–00	40–00
85.	ಆಧುನಿಕ ಹೈನಾಗಾರ ದನಗಳ ನಿರ್ವಹಣೆ		(ಅಚ್ಚಿನಲ್ಲಿದೆ)
86.	ದಾಸ್ತಾನು ಕೀಟಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಹತೋಟಿ		(ಅಚ್ಚಿನಲ್ಲಿದೆ)
87.	ಮನೆಕೀಟಗಳು ಹಾಗೂ ಇತರ ಪೀಡೆಗಳ ನಿರ್ವಹಣೆ		(ಅಚ್ಚಿನಲ್ಲಿದೆ)
88.	ಜಾನುವಾರ, ಮನುಷ್ಯರಿಗೆ ಬೀಳುವ ರೋಗಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಹತೋಟಿ		(ಅಚ್ಚಿನಲ್ಲಿದೆ)
89.	ತೆಂಗಿನ ಬೇಸಾಯ	9–00	14–00
90.	ಆಹಾರ ರಕ್ಷಣೆ ಮತ್ತು ಕೆಡುವಿಕೆಯ ತತ್ವಗಳು (ಆಹಾರ ಸೂಕ್ಷ್ಮಜೀವಿ ವಿಜ್ಞಾನ, ಭಾಗ–2)		(ಅಚ್ಚಿನಲ್ಲಿದೆ)
91.	ಸೂಕ್ಷ್ಮಜೀವಿಶಾಸ್ತ್ರದ ಬೆಳವಣಿಗೆ ಹಾಗೂ ವಿಧಾನಗಳು (ಸೂಕ್ಷ್ಮಜೀವಿ ಜಗತ್ತು, ಭಾಗ–1)	17–00	
92.	ಕೃಷಿ, ಸಸ್ಯಶಾಸ್ತ್ರ ಪಾರಿಭಾಷಿಕ ಶಬ್ದಕೋಶ	2–00	
93.	ಹಸುರು ಸಸ್ಯದ ಜೀವನ		(ಅಚ್ಚಿನಲ್ಲಿದೆ)
94.	ಸೂಕ್ಷ್ಮ ಜೀವಿಗಳ ಚಯಾಪಚಯ (ಜೀವ ದ್ರವ್ಯ ಪರಿಣಾಮ) ಕ್ರಿಯೆಗಳು, ರಚನೆ ಮತ್ತು ಕಾರ್ಯ ಸಂಬಂಧ (ಸೂಕ್ಷ್ಮಜೀವಿ ಜಗತ್ತು, ಭಾಗ–2)		(ಅಚ್ಚಿನಲ್ಲಿದೆ)
95.	ವಿವಿಧ ಆಹಾರಗಳು ಕಲುಷಿತವಾಗುವಿಕೆ, ಕೆಡುವಿಕೆ ಮತ್ತು ರಕ್ಷಣೆ(ಆಹಾರ ಸೂಕ್ಷ್ಮಜೀವಿ ವಿಜ್ಞಾನ, ಭಾಗ–3)		(ಅಚ್ಚಿನಲ್ಲಿದೆ)

ಸಾದಾ ಕ್ಯಾಲಿಕೊ

96· ಸೂಕ್ಷ್ಮ ಜೀವಿಗಳಿಂದ ಉತ್ಪತ್ತಿಯಾದ ಕಿಣ್ವಗಳು ಮತ್ತು ಆಹಾರಗಳು (ಆಹಾರ ಸೂಕ್ಷ್ಮಜೀವವಿಜ್ಞಾನ, ಭಾಗ-4) (ಅಚ್ಚಿನಲ್ಲಿದೆ)

97· ರೋಗಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಪಟ್ಟಂತೆ ಆಹಾರಗಳು (ಆಹಾರ ಸೂಕ್ಷ್ಮ ಜೀವಿ ವಿಜ್ಞಾನ, ಭಾಗ-5) (ಅಚ್ಚಿನಲ್ಲಿದೆ)

98· ಆಹಾರ ನೈರ್ಮಲ್ಯ – ಹತೋಟಿ ಮತ್ತು ಪರೀಕ್ಷೆ (ಆಹಾರ ಸೂಕ್ಷ್ಮಜೀವಿ ವಿಜ್ಞಾನ, ಭಾಗ-6) (ಅಚ್ಚಿನಲ್ಲಿದೆ)

99· ವೈರಸಗಳು (ಸೂಕ್ಷ್ಮಜೀವಿ ಜಗತ್ತು, ಭಾಗ-3) (ಅಚ್ಚಿನಲ್ಲಿದೆ)

100· ದಾಸ್ತಾನು, ಮನೆ, ಜಾನುವಾರ ಹಾಗೂ ಮನುಷ್ಯರಿಗೆ ಬೀಳುವ ರೋಗಗಳು ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ ಹತೋಟಿ (ಅಚ್ಚಿನಲ್ಲಿದೆ)

101· ಆಹಾರ ಸೂಕ್ಷ್ಮಜೀವಿ ವಿಜ್ಞಾನ (ಅಚ್ಚಿನಲ್ಲಿದೆ)

102· ಹಣ್ಣು ಮತ್ತ ತರಕಾರಿ ಸಂರಕ್ಷಣೆ (ಅಚ್ಚಿನಲ್ಲಿದೆ)

103. ಪಾರ್ಮನಿರ್ವಹಣೆ ಅರ್ಥಶಾಸ್ತ್ರ (ಅಚ್ಚಿನಲ್ಲಿದೆ)

104· ಮತ್ಸ್ಯಶಾಸ್ತ್ರ (ಅಚ್ಚಿನಲ್ಲಿದೆ)